MEM-205 Περιγραφική Στατιστική

Τμήμα Μαθηματικών και Εφ. Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης

Κώστας Σμαραγδάκης (kesmarag@pm.me)

24-04-2023

$$Y_t = T_t + S_t + R_t, \quad t = 1, \ldots, N$$

- Θέλουμε να προσεγγίσουμε το $Y_t - T_t$
- Θα μελετήσουμε τη περίπτωση μακροχρόνιας τάσης που περιγράφεται ικανοποιητικά από ένα πολυώνυμο p-βαθμού

Λήμμα

Έστω το p-βαθμού πολυώνυμο

$$f(t) = c_0 + c_1 t + \ldots + c_p t^p.$$

Τότε

$$\Delta f(t) = f(t) - f(t-1)$$

θα είναι πολυώνυμο με βαθμό το πολύ $p - 1$

Διωνυμικό Ανάπτυγμα

$$(\alpha + b)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \alpha^k b^{p-k} \quad \text{όπου} \quad \binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!}$$

$$f(t-1) = c_0 + c_1(t-1) + \ldots + c_p(t-1)^p$$

$$\Delta f(t) = \cancel{c_0} + c_1 t + \ldots + c_p t^p - \cancel{c_0} - c_1(t-1) - \ldots - c_p(t-1)^p$$

$$\Delta f(t) = m(t) + c_p\left[t^p - (t-1)^p\right], \quad m(t)\text{ - πολυώνυμο το πολύ } p-1$$

βαθμού.

$a = t,\ b = -1$

$$(t-1)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} t^k (-1)^{p-k} = \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p}{k} t^k (-1)^{p-k} + \binom{p}{p} t^p (-1)^{p-p}$$

$$= \eta(t) + t^p$$

$$\binom{p}{p} = \frac{p!}{p!\,(p-p)!} = 1$$

$$\Delta f(t) = m(t) + c_p\left(-\eta(t)\right)$$

άρα Δf είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ $p-1$.

$\Delta(\Delta f(t))$ πολυώνυμο βαθμού το πολύ $p-2$

$\parallel$

$\Delta^2 f(t) = \Delta\big(f(t) - f(t-1)\big) = \Delta f(t) - \Delta f(t-1) = f(t) - f(t-1) - f(t-1) + f(t-2)$

$= f(t) - 2f(t-1) + f(t-2)$

$\vdots$

$\Delta\left(\Delta^{p-1} f(t)\right) \longrightarrow$ σταθερά.

$\parallel$

$\Delta^p f(t)$

Παράδειγμα

$$T_t = t^2$$

$$Y_t = \{1, 4, 9, 16, 25\}$$

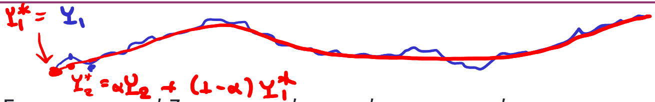
$$Y_t^* = \Delta^2 f(t) = f(t) - 2f(t-1) + f(t-2)$$

$$Y_t - 2Y_{t-1} + Y_{t-2}$$

$$Y_t^* = \{\sqcup, \sqcup, \underbrace{9 - 2\cdot 4 + 1}_{2}, \underbrace{16 - 2\cdot 9 + 4}_{2}, \underbrace{25 - 2\cdot 16 + 9}_{2}\}$$

$$Y_t^* \approx S_t + R_t$$

Εκθετική Εξομάλυνση (Exponential Smoother)



- Όταν η χρονολογική σειρά δεν παρουσιάζει εποχικές κυμάνσεις και έντονες μακροχρόνιες τάσεις, η εξομάλυνση χρησιμοποιείται για τη πρόβλεψη της τιμής Y_{N+1} γνωρίζοντας τις τιμές της χρονολογικής σειράς για τους χρόνους $t = 1, \ldots, N$

Έστω η χρονολογική σειρά

$$\{Y_1, \ldots, Y_N\}$$

και σταθερά $\alpha \in (0, 1)$
Ο παρακάτω γραμμικός μετασχηματισμός ονομάζεται εκθετική εξομάλυνση

$$Y_t^* = \alpha Y_t + (1-\alpha) Y_{t-1}^*, \quad t = 2, \ldots, N$$

όπου $Y_1^* = Y_1$

Παράδειγμα $\{2, 5, 4.25 \quad \}$

$$\{2,\ 6,\ 4,\ 6,\ 8,\ 6,\ 10,\ 10,\ 8,\ 6,\ 4,\ 8\},\quad \alpha = 0.75$$

$(1-\alpha) = 0.25$

$Y_1^* = Y_1 = 2$

$Y_2^* = \frac{3}{\cancel{4}_{2}} \cancel{6}^{3} + \frac{1}{4} 2 = 4.5 + 0.5 = 5$

$Y_3^* = \frac{3}{4} \cdot 4 + \frac{1}{4} 5 = 3 + 1.25 = 4.25$

$$Y_t^* = \alpha Y_t + (1-\alpha) Y_{t-1}^*, \quad Y_1^* = Y_1$$

$$Y_t^* = \alpha \sum_{j=0}^{t-2} (1-\alpha)^j Y_{t-j} + (1-\alpha)^{t-1} Y_1, \quad t = 2, \dots, N$$

$$Y_2^* = \alpha \sum_{j=0}^{0} (1-\alpha)^j Y_{2-j} + (1-\alpha) Y_1 = \alpha \cancel{(1-\alpha)^0}^{1} Y_2 + (1-\alpha) Y_1 =$$

$$= \alpha Y_2 + (1-\alpha) Y_1^*$$

Έστω ότι ισχύει για t

Θ.Δ.Ο ισχύει για $t+1$

$$Y_{t+1}^* = \alpha Y_{t+1} + (1-\alpha) Y_t^* =$$

$$= \alpha Y_{t+1} + (1-\alpha) \left[\alpha \sum_{j=0}^{t-2} (1-\alpha)^j Y_{t-j} + (1-\alpha)^{t-1} Y_1 \right] =$$

$$Y_t^* = \alpha \sum_{j=0}^{t-2} (1-\alpha)^j Y_{t-j} + (1-\alpha)^{t-1} Y_1, \quad t = 2, \dots, N$$

$$= \underbrace{\alpha Y_{t+1} + \alpha \sum_{j=0}^{t-2} (1-\alpha)^{j+1} Y_{t-j}} + (1-\alpha)^t Y_1$$

$$\alpha \left[Y_{t+1} + \sum_{j=0}^{t-2} (1-\alpha)^{j+1} Y_{t-j} \right] + (1-\alpha)^t Y_1$$

$$\sum_{j=0}^{t-2} (1-\alpha)^{j+1} Y_{t-j} = \sum_{j^*=1}^{t-1} (1-\alpha)^{j^* \cancel{-1+1}} Y_{t+1-j^*}$$

$j^* = j+1$

$$Y_t^* = \alpha \sum_{j=0}^{t-2} (1-\alpha)^j Y_{t-j} + (1-\alpha)^{t-1} Y_1, \quad t = 2, \ldots, N$$

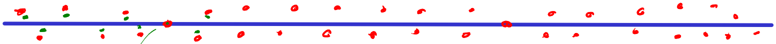
$$\alpha \left[(1-\alpha)^0 Y_{t+1} + \sum_{j^*=1}^{t-1} (1-\alpha)^{j^*} Y_{t+1-j^*} \right] + (1-\alpha)^t Y_1$$

$$= \alpha \sum_{j=0}^{t-1} (1-\alpha)^j Y_{t+1-j} + (1-\alpha)^t Y_1 =$$

$$= \alpha \sum_{j=0}^{(t+1)-1} (1-\alpha)^j Y_{(t+1)-j} + (1-\alpha)^t Y_1$$

- Θεωρούμε $Y_t, t = 1, \ldots, N$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητες.
- Υποθέτουμε επιπλέων ότι $\mathbb{E}(Y_t) = \mu$ και $\mathbb{V}(Y_t) = \sigma^2$ για κάθε $t = 1, \ldots, N$

Y_t



θ.ν.δ.ο $\quad \mathbb{E}[Y_t^*] = \mu \quad \forall t \qquad\qquad \mathbb{E}[Y_t] = \mu$

$$Y_t^* = \alpha \sum_{j=0}^{t-1} (1-\alpha)^j Y_{t-j} + (1-\alpha)^{t-1} Y_1$$

$$\mathbb{E}[Y_t^*] = \alpha \sum_{j=0}^{t-1} (1-\alpha)^j \mathbb{E}[Y_{t-j}] + (1-\alpha)^{t-1} \mathbb{E}[Y_1] =$$

$$= \alpha \mu \sum_{j=0}^{t-1} (1-\alpha)^j + \mu (1-\alpha)^{t-1} =$$

$$= \cancel{\alpha}\mu \frac{1-(1-\alpha)^{t-1}}{\underbrace{1-(1-\alpha)}_{\cancel{\alpha}}} + \mu(1-\alpha)^{t-1} =$$

$$= \mu\left(1-(1-\alpha)^{t-1}\right) + \mu(1-\alpha)^{t-1} = \mu.$$

X, Y ανεξ. τ.μ. $W = \alpha X + bY$ $\quad \sigma_W^2 = \alpha^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2$

$$Var(W) = \alpha^2 Var(X) + b^2 Var(Y)$$

$$Var(Y_t^*) = \alpha^2 \sum_{j=0}^{t-1} (1-\alpha)^{2j} \overbrace{Var(Y_{t-j})}^{\sigma^2} + (1-\alpha)^{2(t-1)} \overbrace{Var[Y_1]}^{\sigma^2} =$$

$$= \alpha^2\sigma^2 \sum_{j=0}^{t-1}(1-\alpha)^{2j} + (1-\alpha)^{2t-2}\sigma^2 =$$

$$= \alpha^2 \sigma^2 \frac{1-(1-\alpha)^{2(t-1)}}{1-(1-\alpha)^2} + (1-\alpha)^{2t-2}\sigma^2 =$$

$$= \sigma^2 \boxed{\alpha^2 \left[\frac{1-(1-\alpha)^{2t-2}}{\alpha \cdot \underbrace{(2-\alpha)}} + \frac{(1-\alpha)^{2t-2}}{\alpha^2} \right]} \leq$$

$2-\alpha \in (1,2)$

$\alpha \in (0,1)$

$$\leq \sigma^2 \alpha^2 \left[\frac{1-\cancel{(1-\alpha)^{2t-2}} + \cancel{(1-\alpha)^{2t-2}}}{\alpha^2} \right] \leq \sigma^2$$

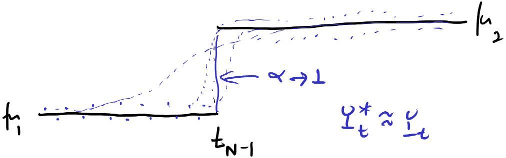
Εκθετική Εξομάλυνση (Exponential Smoother)

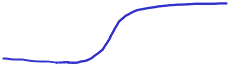
- Θεωρούμε $Y_t, t = 1, \ldots$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητες.
- Υποθέτουμε επιπλέων ότι

$\alpha \in (0,1)$

$$\mathbb{E}(Y_t) = \mu_1,\ t = 1, \ldots, N-1 \quad \text{και} \quad \mathbb{E}(Y_t) = \mu_2,\ t \geq N$$

.





$Y_t^* \approx Y_t$

$\alpha \to 0$

$$\lim_{t \to \infty} \mathbb{E}[Y_t^*] = \mu_2$$

Εάν έχουμε τις τιμές τις χρονολογικής σειράς μέχρι και την χρονική στιγμή $t = N$ θεωρούμε ως προσέγγιση της μελλοντικής τιμής Y_{N+1} το Y_N^*

$$Y_t \to Y_t^* \qquad t = 2, \dots, N$$

$$Y_{N+1} =: Y_N^*$$

$\hat{Y}_{N+1}$ $\qquad$ $t=N$ $\qquad$ $t=N+1$

$$Y_{N+1} - Y_N^* = e_{N+1}$$

$$Y_{N+1}^* - Y_N^* = \alpha Y_{N+1} + (1-\alpha) Y_N^* - Y_N^* = \alpha Y_{N+1} - \alpha Y_N^* =$$
$$= \alpha \left(Y_{N+1} - Y_N^* \right) = \alpha e_{N+1}$$