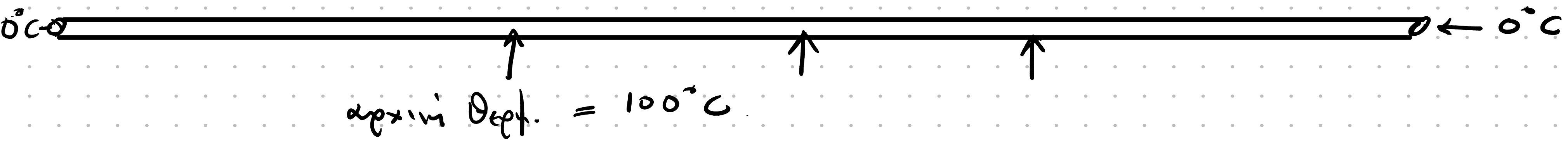
Τι θα συμβει στο προβλημα διαδοσης θερμότητας στη ράβδο σε ∞ χρόνο;



$$u_t = k\, u_{xx}$$

σε ∞ χρόνο η θερμότητα στη ράβδο θα είναι σταθερή.

$t \to \infty$ $\quad u(x,t) = U(x)$ (η θερμότητα δεν θα μεταβάλλεται με το χρόνο)

$$u_t = [U(x)]_t = 0$$

ΣΣ: $u(0) = 0$

$u(L) = 0$

$$k u_{xx} = 0 \Rightarrow u_{xx} = 0 \Rightarrow U(x) = \alpha x + \beta$$

$$u(0) = 0 \Rightarrow \alpha \cdot \cancel{0} + \beta = 0$$

$$u(x) = \alpha x$$

$$u(L) = 0 \Rightarrow \alpha L = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

$$\boxed{u(x) = 0}$$

Άσκηση: Έστω ράβδος μήκους $L>0$ και $u(0,t)=u_1$, $u(L,t)=u_2$ η θερμοκρασία στα άκρα της ράβδου και η θερμοκρασία ικανοποιεί την εξίσωση

$u_t = k u_{xx}$. Σε άπειρο χρόνο ποια θα είναι η θερμοκρασία της ράβδου για κάθε $x \in [0,L]$.

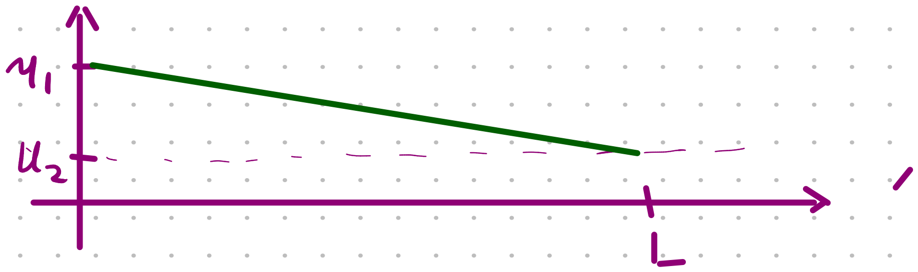
για $t \to \infty$

$k u_{xx} = 0 \Rightarrow u_{xx} = 0 \Rightarrow u = \alpha x + b$. $u(0) = u_1$, $u(L) = u_2$

$u(0) = b = u_1$

$u(x) = \alpha x + u_1 \Rightarrow u(L) = \alpha L + u_1 = u_2 \Rightarrow \alpha = \dfrac{u_2 - u_1}{L}$

Άρα $u(x) = \dfrac{u_2 - u_1}{L} x + u_1$



Μετασχηματισμός Fourier. $\quad (t \xrightarrow{\mathcal{F}} \omega \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} t)$

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega .$$

$$f(x,t) \xrightarrow{\mathcal{F}_{x\to\omega}} \hat{f}(\omega,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,t) e^{-i\omega x} dx \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}_{\omega\to x}} f(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega,t) e^{i\omega x} d\omega$$

$$\left((x,t) \xrightarrow{\mathcal{F}} (\omega,t) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} (x,t) \right)$$

Εξίσωση Θερμότητας στο $\mathbb{R}$.

$$\left.\begin{aligned} &u_t = k u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t>0 \\ &u(x,0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}\right\} (*)$$

$$u_t \xrightarrow{\mathcal{F}_{x\to\omega}} \hat{u}_t(\omega,t)$$

$$\left(\hat{u}_t(\omega,t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_t(x,t) e^{-i\omega x} dx = \right.$$

$$\left. = \left(\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\, e^{-i\omega x} dx\right)_t = \left[\hat{u}(\omega,t)\right]_t \right)$$

$u_{xx} \xrightarrow{\mathcal{F}_{x\to w}} -\omega^2 \hat{u}(\omega,t)$ $\left(\mathcal{F}\{y^{(k)}\} = (i\omega)^k \mathcal{F}\{y\} \right)$

Μερική Διαφορική Εξίσωση (*) $\xrightarrow{\mathcal{F}_{x\to\omega}}$ Συνήθης Διαφορική Εξίσωση (**)

$$\hat{u}_t(\omega,t) = -k w^2 \hat{u}(\omega,t) \Rightarrow \begin{cases} \hat{u}_t + k w^2 \hat{u} = 0 \\ \hat{u}(\omega,0) = \hat{f}(\omega) \end{cases} \quad (**)$$

<u>Λύση</u> της (**)

$$\hat{u}(\omega,t) = C(w) e^{-kw^2 t}$$

$$\hat{u}(\omega,0) = C(\omega) e^{-kw^2 \cdot 0} = \boxed{C(\omega) = \hat{f}(\omega)}$$

Άρα η λύση της (**) είναι $\hat{u}(\omega,t) = \hat{f}(\omega) e^{-kw^2 t}$

Από Αντίστροφο Μ. Fourier

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\, e^{-k\omega^2 t}\, e^{i\omega x}\, d\omega$$

Πρώτη αναπαράσταση της λύσης μ+ $\mathcal{F}^{-1}$

$$\mathcal{F}_{x\to\omega}\left\{e^{-x^2/4kt}\right\} = \sqrt{4k\pi t}\, e^{-k\omega^2 t}$$

$$\hat{u}(\omega,t) = \hat{f}(\omega) e^{-k\omega^2 t} = \hat{f}(\omega)\, \mathcal{F}\left\{ e^{-x^2/4kt} \right\} \cdot \frac{1}{\sqrt{4k\pi t}}$$

<u>Συνέλιξη</u> $(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) g(x-\xi)\, d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-\xi) g(\xi)\, d\xi = (g*f)(x)$

$$\mathcal{F}\{f*g\} = \hat{f}(\omega)\,\hat{g}(\omega)$$

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4k\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-\xi)\, e^{-\xi^2/4kt}\, d\xi$$

Δεύτερη αναπαράσταση της λύσης μ+ $*$ + μετασχηματισμό Fourier.

1^{η} αναπαράσταση

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\, e^{-k\omega^2 t}\, e^{i\omega x}\, d\omega}$$

2^{η} αναπαράσταση

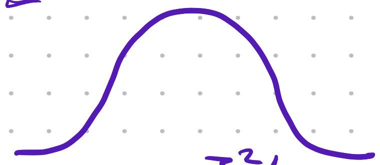
$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4k\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-\xi)\, e^{-\xi^2/4kt}\, d\xi}$$

(Έχει την ίδια μορφή)

Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας της κανονικής κατανομής

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,dx = 1$$



$e^{-\xi^2/4kt}$

Παράδειγμα:

$u_t = u_{xx} \quad , \quad x \in \mathbb{R}.$

$u(x,0) = 100 = f(x)$

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \overset{f(x-\xi)}{100}\, e^{-\xi^2/4t}\, d\xi = \overbrace{\frac{100}{\sqrt{2\pi}\,\underbrace{\sqrt{2t}}_{\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2/2(\overbrace{\sqrt{2t}}^{\sigma})^2}\, d\xi}^{1} = 100$$