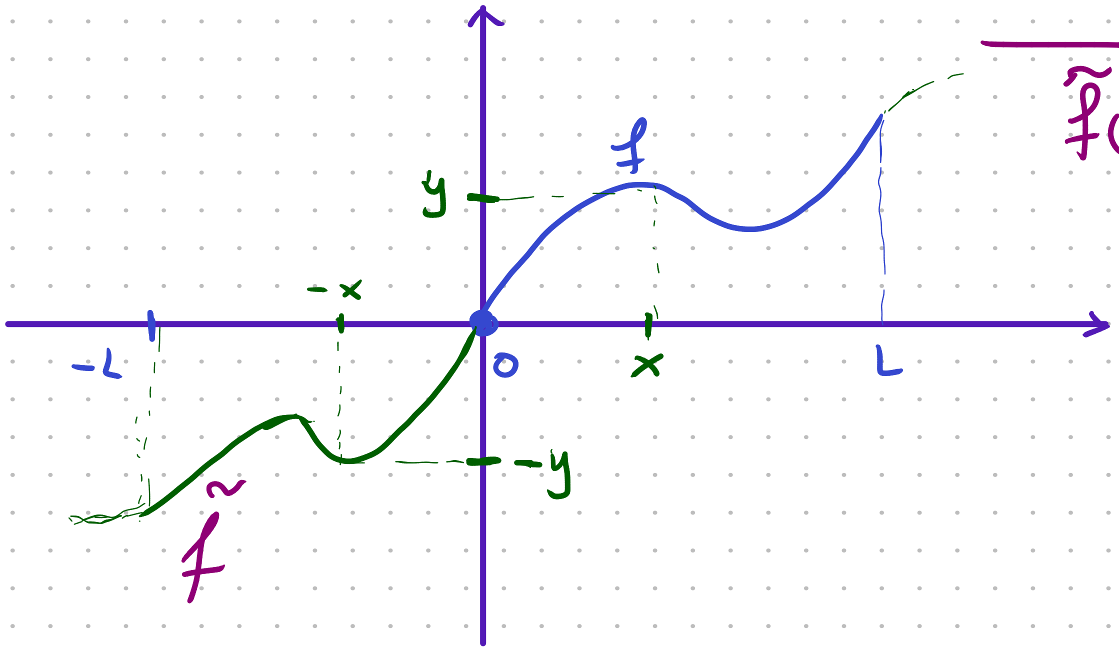
Περιττή Επέκταση

$$\begin{cases} f:[0,L]\to\mathbb{R}, & L>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

Περιττή συνάρτηση $f(-x) = -f(x) \quad \forall x$

για $x=0$.

Έχουμε $f(0) = -f(0) \Rightarrow 2f(0)=0 \Rightarrow f(0)=0$



$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x\in[0,L] \\ -f(-x), & x\in[-L,0) \\ f(x+2L), & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$\tilde{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$\tilde{f}\big|_{[0,L]} = f$

↑ περιορισμός.

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Ανάπτυγμα Fourier ή Σειρά Fourier για την $\tilde{f}$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \tilde{f}(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx$$

(άρτια συνάρτηση)

$$= \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx.$$

* Το γινόμενο 2 περιττών συναρτήσεων είναι άρτια συνάρτηση.

$$f(-x)\,g(-x) = (-f(x))(-g(x)) = f(x)\,g(x)$$

Στο $[0, L]$ $\tilde{f}(x) =$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx$$

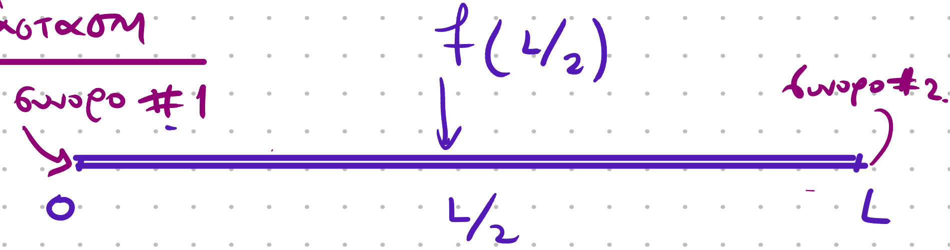
Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις (ΜΔΕ)

$u(x,t)$ — x: χώρο, t: χρόνο

$\frac{\partial u}{\partial x} \doteq u_x \qquad \frac{\partial u}{\partial t} \doteq u_t \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \doteq u_{xx}$

$u_{xt} \doteq \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \doteq u_{tx}$

Εξίσωση Θερμότητας / Διάχυσης στη 1 διάσταση



$u_t = K u_{xx}$, $K>0$, $x \in [0,L]$, $L>0$, $t \geq 0$

Αρχική συνθήκη (ΑΣ):

$u(x,0) = f(x)$ (αρχική θερμότητα σε κάθε σημείο της ράβδου)

$u(0,t) = u(L,t) = 0$

$u_t = k u_{xx} \quad (\sim)$

$u(x,0) = f(x) \quad \forall x \in [0,L]$

$u(0,t) = u(L,t) = 0 \quad \forall t$

$\mathcal{G} \quad \mathcal{X} \quad \mathcal{Z} \quad \mathcal{Y} \quad \Omega$

$G \quad Q \quad q \quad \ddot{T}$

Μέθοδος Χωριζομένων Μεταβλητών.

Ψάχνουμε για λύση της μορφής $u(x,t) = X(x)\,T(t) \quad \forall t \geq 0 \;\; \forall x \in [0,L]$

$u_t = \left(X(x)\,T(t)\right)_t = X(x)\,\dot{T}(t) \qquad \dot{T}(t) \doteq \frac{dT}{dt}$

$u_{xx} = \left(X(x)\,T(t)\right)_{xx} = T(t)\,X''(x)$

$(\sim) \quad X\dot{T} = kX''T \Rightarrow \frac{X\dot{T}}{XT} = k\frac{X''T}{XT} \Rightarrow \underbrace{\frac{\dot{T}}{kT}}_{\text{Συνάρτηση του } t} = \overbrace{\frac{X''}{X}}^{\text{Συνάρτηση του } x} = -\mu^2, \; \mu > 0$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ I:

$$\frac{\dot{T}}{kT} = -\mu^2 \Rightarrow \boxed{\dot{T} + k\mu^2 T = 0}$$

$(y' + \alpha y = 0)$

$y(0) = y_0$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ II:

$$\frac{X''}{X} = -\mu^2 \Rightarrow \boxed{X'' + \mu^2 X = 0} \ (*) \quad (y'' + \alpha y = 0)$$

Χαρακτηρ. πολυώνυμο $p^2 + \mu^2 = 0 \Rightarrow p_{1,2} = \pm i\mu$

$$X(x) = c_1 \cos(\mu x) + c_2 \sin(\mu x)$$

$$u(0,t) = u(L,t) = 0 \Rightarrow X(0)T(t) = X(L)T(t) = 0 \quad \forall t > 0$$

$$\Rightarrow \boxed{X(0) = X(L) = 0} \ (**)$$

$$\begin{cases} X'' + \mu^2 X = 0 \\ X(0) = 0 \\ X(L) = 0 \end{cases} \longrightarrow X(x) = c_1 \cos(\mu x) + c_2 \sin(\mu x)$$

$$X(0) = c_1 = 0 \Rightarrow X(x) = c_2 \sin(\mu x)$$

$$X(L) = c_2 \sin(\mu L) = 0 \Rightarrow \mu L = n\pi, \quad n = 1, \dots, \infty$$

$$\Rightarrow \mu_n L = n\pi \rightarrow \mu_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\boxed{X_n(x) = c_{2,n} \sin(\mu_n x), \quad n = 1, 2, \dots}$$

Επιστροφή στο Πρόβλημα I.

$$\dot{T}_n + k\mu_n^2 T_n = 0 \Rightarrow T_n(t) = c_{3,n} e^{-k\mu_n^2 t}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Είχαμε γράψει

$u(x,t) = X(x)\,T(t) \xRightarrow{n=1,2,\dots} u_n(x,t) = \underbrace{C_{2,n}\,C_{3,n}}_{C_n}\, e^{-k\mu_n^2 t}\,\sin(\mu_n x)$

Άρα

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\, e^{-k\mu_n^2 t}\,\sin(\mu_n x) \quad (***)$$

$u(x,0) = f(x) \quad \forall x \in [0,L]$

$$(***) \xrightarrow{t=0} u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(\mu_n x) = f(x)$$

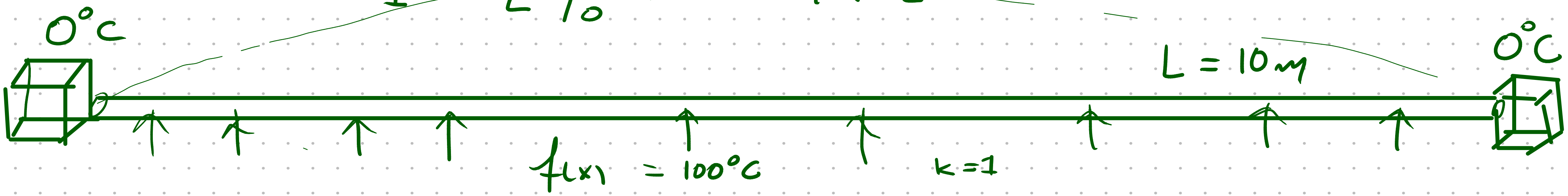
$$C_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin(\mu_n x)\,dx = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx.$$

Στη πράξη $e^{-k\mu_n^2 t} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ και μάλιστα γρήγορα.

Μια πολύ καλή προσέγγιση της λύσης:

$$u(x,t) \simeq C_1 e^{-k\frac{\pi^2}{L^2}} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

$$C_1 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx$$



$$C_1 = \frac{2}{10}\int_0^{10} 100 \sin\left(\frac{\pi x}{10}\right) dx = 20\int_0^{10} \sin\left(\frac{\pi x}{10}\right) dx = -20\,\frac{10}{\pi}\left[\cos\left(\frac{\pi x}{10}\right)\right]_0^{10} =$$

$$= -\frac{200}{\pi}(-1-1) = \frac{400}{\pi}$$

$$u(x,t) \simeq \frac{400}{\pi} e^{-\frac{\pi^2}{100}t} \sin\left(\frac{\pi x}{10}\right)$$