2° quiz 17.1.2025 , 17:00 - 17:45

2° Μέρος - Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

Σειρές Fourier.

Μερικά Χρήσιμα Ολοκληρώματα.

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)\cos(nx)\,dx = \delta_{mn} = \begin{cases} 1, & \text{αν } m=n \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} \delta_{11} = 1 \\ \delta_{15} = 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(mx)\sin(nx)\,dx = \delta_{mn}$$

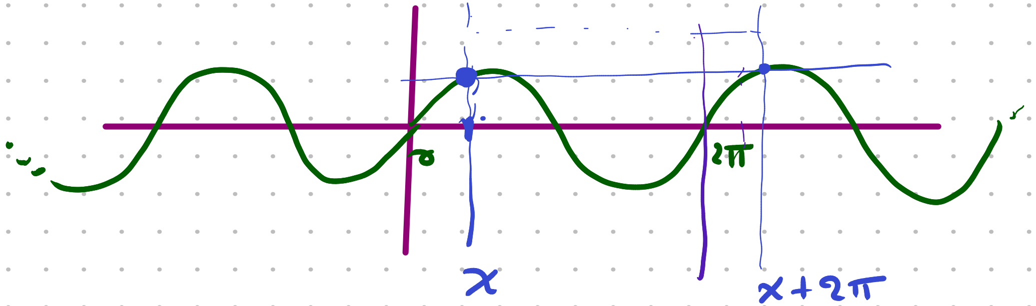
$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)\sin(nx)\,dx = 0 \qquad \forall\, m,n \in \mathbb{N}$$

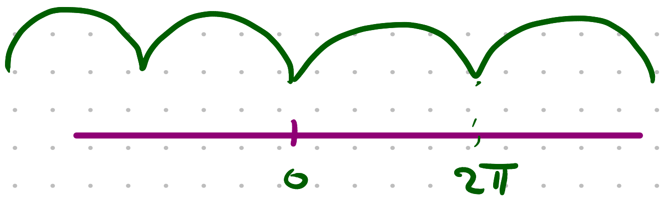
Taylor: $\{1, x, x^2, \dots\}$ $\qquad f(x) = \sum a_n x^n$

Fourier: $\{1, \sin(x), \cos(x), \sin(2x), \cos(2x), \dots\}$

f : 2π-περιοδική συνάρτηση αν $f(x) = f(x+2\pi)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

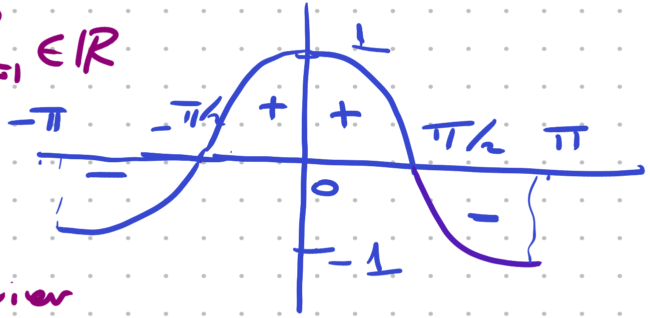
Πχ. $\sin(x)$





Έστω f: 2π-περιοδική τότε $\exists \{a_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{R}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{R}$

τ.ω. $$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$



Εύρεση $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ ← Συντελεστές Fourier

Υπολογισμός του a_0

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} a_0\,dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\,dx}_{=0} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\,dx}_{=0}$$

$$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 2\pi \alpha_0 \Rightarrow \boxed{\alpha_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx}$$

Υπολογισμός των $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$f(x) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

Πολλαπλασιάζουμε τα δύο μέλη με $\cos(mx)$, για κάποιο $m \in \mathbb{Z}^+$ και ολοκληρώνουμε στο $[-\pi,\pi]$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)\,dx = \cancelto{0}{\int_{-\pi}^{\pi} \alpha_0 \cos(mx)\,dx} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)\,dx}_{\pi\delta_{mn}} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cancelto{0}{\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\cdot\cos(mx)\,dx}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)\,dx = \pi\alpha_m \Rightarrow \alpha_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)\,dx$$ για τυχαίο $m \in \mathbb{Z}^+$

άρα για κάθε $n=1,2,\dots$ $$\boxed{\alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx}$$

Υπολογισμός των $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$f(x) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

Πολλαπλασιάζουμε με $\sin(mx)$ τα δύο μέλη και ολοκληρώνουμε στο $[-\pi,\pi]$

$$\boxed{b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx ,} \quad n=1,2,\dots$$

<u>ΙΔΕΑ</u>: $S_N(x) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{N}\alpha_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{N} b_n \sin(nx)$

$$\lim_{N\to\infty} S_N(x) = f(x) \quad \text{ομοιόμορφα}$$

Επέκταση Σειρών Fourier σε τυχαία περιόδους.

Έστω f είναι $2p$-περιοδική.

ορίζουμε την $g(x) = f\left(\frac{p}{\pi}x\right)$, g 2π-περιοδική.

$$g(x+2\pi) = f\left(\frac{p}{\pi}(x+2\pi)\right) = f\left(\frac{p}{\pi}x + \frac{p}{\cancel{\pi}}2\cancel{\pi}\right) = f\left(\frac{p}{\pi}x + 2p\right) = f\left(\frac{p}{\pi}x\right) = g(x)$$

$$g(\tilde{x}) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(n\tilde{x}) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\tilde{x}) \quad \otimes$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\tilde{x})\,d\tilde{x}, \quad \alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\tilde{x})\cos(nx)\,dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\tilde{x})\sin(nx)\,dx.$$

Θέτουμε $\tilde{x} = \frac{\pi}{p}x \Rightarrow x = \frac{p}{\pi}\tilde{x}$ $\qquad d\tilde{x} = \frac{\pi}{p}dx.$

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\tilde{x})\,d\tilde{x} = \frac{1}{2\cancel{\pi}}\,\frac{\cancel{\pi}}{p}\int_{-p}^{p} g\left(\frac{\pi}{p}x\right)dx = \alpha_0$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f\left(\cancel{\frac{p}{\pi}}\,\cancel{\frac{\pi}{p}}\,x\right)dx \Rightarrow \boxed{\alpha_0 = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(x)\,dx}$$

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\tilde{x})\cos(n\tilde{x})\,d\tilde{x} \overset{\tilde{x}=\frac{\pi}{p}x}{=} \frac{1}{\cancel{\pi}}\,\frac{\cancel{\pi}}{p}\int_{-p}^{p} \overbrace{g\left(\frac{\pi}{p}x\right)}^{f(x)}\cos\left(n\frac{\pi}{p}x\right)dx = \alpha_n$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{p}x\right)dx}$$

$n = 1, 2, \dots.$

$$\boxed{b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{p}x\right)dx}$$

Εαν f : $2p$ περιοδική τότε από (*) με αλλαγή μεταβλητής $\tilde{x} = \frac{\pi}{p}x$

$$f(x) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\cos\left(\frac{n\pi}{p}x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\left(\frac{n\pi}{p}x\right)$$

2π - περιοδική.

$$\{1, \cos(nx), \sin(nx)\}_{n=1}^{\infty}$$

$\longrightarrow$

$2p$ - περιοδική

$$\{1, \cos(\frac{n\pi}{p}x), \sin(\frac{n\pi}{p}x)\}_{n=1}^{\infty}$$

[f άρτια συνάρτηση και 2p-περιοδική.]

$f(-x) = f(x) \quad \forall x.$

$$f(x) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(\frac{n\pi}{p}x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\frac{n\pi}{p}x)$$

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\sin(\frac{n\pi}{p}x)\,dx = \frac{1}{p}\int_{-p}^{0} f(x)\sin(\frac{n\pi}{p}x)\,dx$$

$$+ \frac{1}{p}\int_{0}^{p} f(x)\sin(\frac{n\pi}{p}x)\,dx$$

$$\underset{dx^* = -dx}{\overset{x^* = -x}{\sim\!\sim}} -\frac{1}{p}\int_p^0 \underbrace{f(-x^*)}_{f(x^*)} \sin\left(-\frac{n\pi}{p}x^*\right) dx^* = \frac{1}{p}\int_p^0 f(x^*) \sin\left(\frac{n\pi}{p}x^*\right) dx^* =$$

$x = -x^*$

$$= -\frac{1}{p}\int_0^p f(x^*) \sin\left(\frac{n\pi}{p}x^*\right) dx^*$$

άρα $\quad b_n = 0 \quad , n = 1, \ldots,$

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{p}x\right)$$

[f περιττή και $2p$ - περιοδική]

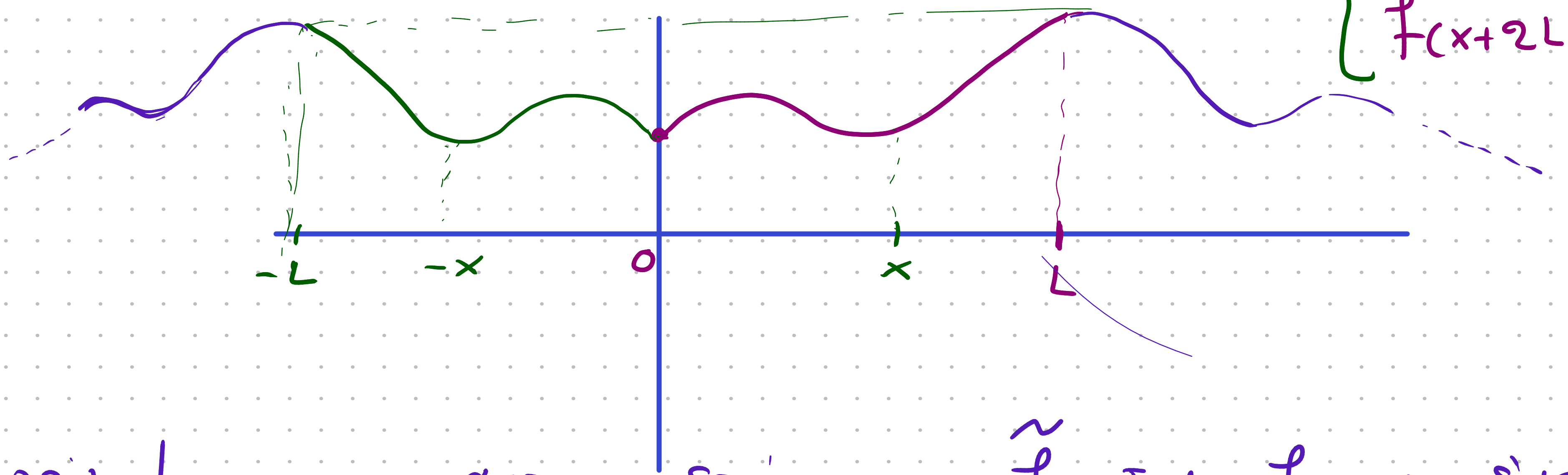
Έχουμε

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos\left(\frac{n\pi}{p}x\right) \quad , \quad a_0 = 0 \; , \; \{a_n\}_{n=1}^{\infty} = 0$$

Έστω $f:[\alpha,b]\to\mathbb{R}$ θα ορίσουμε την άρτια επέκταση της f στο $\mathbb{R}$.
χωρίς βλάβη της γενικότητας θα θέσουμε $\alpha=0$, $b=L$

$f:[0,L]\to\mathbb{R}$, $L>0$

$$\begin{cases} f(-x)=f(x) \\ f(x+2L)=f(x) \end{cases}$$



ορίζουμε την άρτια επέκταση $\tilde{f}$ της f να είναι

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x), & \text{αν } x\in[0,L] \\ f(-x), & \text{αν } x\in[-L,0] \\ f(x+2L), & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

άρα $\quad \tilde{f}(x) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$

$$\alpha_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} \tilde{f}(x)\,dx \qquad \alpha_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} \tilde{f}(x)\,dx.$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{0} \underbrace{\tilde{f}(x)}_{f(-x)}\,dx + \frac{1}{2L} \int_{0}^{L} \underbrace{\tilde{f}(x)}_{f(x)}\,dx = \frac{1}{L} \int_{0}^{L} f(x)\,dx.$$

$$\alpha_n = \frac{2}{L} \int_{0}^{L} f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx \quad , \; n = 1, 2, \ldots$$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \tilde{f}(x) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$ με α_0, $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ να δίνονται από την f.

$\forall x \in [0, L]$ τότε $\tilde{f}(x) = f(x)$

$$f(x) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right),$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx \quad , \quad \alpha_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx .$$