Μετασχηματισμός
Fourier

$$y(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{y}(\omega) = \mathcal{F}\{y(t)\}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

$$\hat{y}(\omega) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\hat{y}(\omega)\}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{y}(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega$$

Έστω $y(t)$ συνάρτηση τ.ω $\lim_{t\to\pm\infty} y(t) = 0$ και $\exists\, y'(t)$

$$\mathcal{F}\{y'(t)\}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} y'(t)\, e^{-i\omega t}\, dt = y(t)\, e^{-i\omega t}\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\left[e^{-i\omega t}\right]' dt =$$

$$= \cancel{\lim_{t\to+\infty} y(t)}^{\,0} e^{-i\omega t} - \cancel{\lim_{t\to-\infty} y(t)}^{\,0} e^{-i\omega t} - (-i\omega)\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\, e^{-i\omega t}\, dt =$$

$$= i\omega\, \mathcal{F}\{y(t)\}(\omega)$$

Έστω $y(t)$ συνάρτηση τ.ω $\lim_{t\to\pm\infty} y(t) = \lim_{t\to\pm\infty} y'(t) = 0$

$\exists\, y', y''$

$$\mathcal{F}\{y''(t)\}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} y''(t)\, e^{-i\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (y'(t))'\, e^{-i\omega t}\, dt =$$

$$= \cancelto{0}{y'(t)\, e^{-i\omega t}\Big|_{-\infty}^{+\infty}} - \int_{-\infty}^{+\infty} y'(t)\, [e^{-i\omega t}]'\, dt = (i\omega)\, \mathcal{F}\{y'(t)\}(\omega) \overset{\xi}{=}$$

$$= (i\omega)^2\, \mathcal{F}\{y(t)\}(\omega) = -\omega^2\, \mathcal{F}\{y(t)\}(\omega)$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{F}\{y^{(k)}(t)\}(\omega) = (i\omega)^k\, \mathcal{F}\{y(t)\}(\omega)$$

Ένα χρήσιμο ολοκλήρωμα. $\qquad \omega \in \mathbb{R},\ \xi \in \mathbb{R},\ \underline{\xi \neq 0},\ z \in \mathbb{C}$ (ή $\mathbb{R}$) αφού $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega\xi}}{\omega - z}\, d\omega$$

Εάν $z \in \mathbb{R}$: $\quad I = \frac{i}{2}\, e^{iz\xi} \cdot \mathrm{sgn}(\xi) \qquad \mathrm{sgn}(\xi) = \begin{cases} +1, & \text{αν } \xi > 0 \\ -1, & \text{αν } \xi < 0 \end{cases}$

Εάν $Im(z)>0$ τότε $I = \begin{cases} i e^{iz\xi}, & \text{αν } \xi>0 \\ 0, & \text{αν } \xi<0 \end{cases}$

Εάν $Im(z)<0$ τότε $I = \begin{cases} 0, & \text{αν } \xi>0 \\ -i e^{iz\xi}, & \text{αν } \xi<0 \end{cases}$.

$\left(z = \alpha + i\beta \qquad Re(z) = \alpha, \ Im(z) = \beta \right)$

Διαφορική Εξίσωση $\longrightarrow$ $\boxed{\mathcal{F}}$ $\longrightarrow$ Αλγεβρική Εξίσωση

Παράδειγμα: $y'' - y = f(t) \longrightarrow -\omega^2 \hat{y}(\omega) - \hat{y}(\omega) = \hat{f}(\omega)$

$y^{(k)} \xrightarrow{\mathcal{F}} (i\omega)^k \hat{y}(\omega)$

$\Rightarrow (-\omega^2 - 1)\hat{y}(\omega) = \hat{f}(\omega) \Rightarrow \boxed{\hat{y}(\omega) = \dfrac{-\hat{f}(\omega)}{\omega^2 + 1}}$

$y'' \xrightarrow{\mathcal{F}} (i\omega)^2 \hat{y}(\omega) = -\omega^2 \hat{y}(\omega)$

$$\Rightarrow \quad y(t) = \frac{-1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{f}(\omega)}{\omega^2+1} e^{i\omega t} d\omega \qquad \left(y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{y}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \right)$$

$$ay'' + by' + cy = g(t) \quad \begin{cases} ay_h'' + by_h' + cy_h = 0 \quad \checkmark \\ ay_p'' + by_p' + cy_p = g(t) \quad \checkmark \end{cases} \longrightarrow y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

Dirac $\delta(t)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\tau) f(t)\, dt = f(\tau)$$

$$ay'' + by' + cy = \delta(t-\tau)$$ για κάποιο τ.

παράμετρος

$$y \doteq G(t;\tau) = G(t)$$

Παράδειγμα

$$g'' - g = \delta(t-\tau) \xrightarrow{\mathcal{F}} -\omega^2 \hat{g} - \hat{g} = e^{-i\omega\tau} \qquad \left(\mathcal{F}(\delta(t-\tau))(\omega) = e^{-i\omega\tau}\right.$$

$$\Rightarrow \hat{g} = \frac{-e^{-i\omega\tau}}{\omega^2+1}$$

$$i^2 + 1 = -1+1=0$$

$$(-i)^2+1 = -1+1=0$$

$$g(t;\tau) = \frac{-1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega(t-\tau)}}{\omega^2+1}\,d\omega$$

$$\omega^2+1=0 \begin{cases} \omega = -i \\ \text{ή} \\ \omega = i \end{cases}$$

$$\frac{1}{\omega^2+1} = \frac{A}{\omega-i} + \frac{B}{\omega+i} = \frac{A(\omega+i)+B(\omega-i)}{(\omega-i)(\omega+i)} = \frac{(A+B)\omega + (A-B)i}{\omega^2+1}$$

Θέλουμε $A+B=0 \Rightarrow A=-B$

$$(A-B)i = 1 \Rightarrow 2Ai = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2}, \quad B = \frac{i}{2}$$

$$\mathcal{G}(t;\tau) = \frac{1}{2\pi}\,\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\omega\overbrace{(t-\tau)}^{\xi}}}{\omega-\underbrace{i}_{z}}\,d\omega \;-\; \frac{1}{2\pi}\,\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\omega(t-\tau)}}{\omega+i}\,d\omega$$

$$\left(I = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\omega\xi}}{\omega-z}\,d\omega \right)$$

$\mathrm{Im}(z)>0$ $\qquad$ $z=-i$, $\mathrm{Im}(z)<0$

Αν $\xi>0 \Leftrightarrow t>\tau$ τότε

$$\mathcal{G}(t;\tau) = \frac{i}{2}\, i\, e^{i\cdot i\,(t-\tau)} = -\frac{1}{2}e^{-(t-\tau)}$$

$$\left(i\, e^{iz\xi} \right)$$

Αν $\xi<0 \Leftrightarrow t<\tau$ τότε

$$\mathcal{G}(t;\tau) = -\frac{i}{2}(-i)\cdot e^{i\cdot(-i)(t-\tau)} = -\frac{1}{2}e^{(t-\tau)} = -\frac{1}{2}e^{-(\tau-t)}$$

$$i\cdot(-i) = -i^2 = -(-1) = 1$$

Γενικά για $t\neq\tau$ ισχύει

$$\mathcal{G}(t;\tau) = -\frac{1}{2}e^{-|t-\tau|}$$

$$g(t;\tau) = \begin{cases} -\frac{1}{2}e^{-(t-\tau)}, & t>\tau \\ -\frac{1}{2}e^{-(\tau-t)}, & t<\tau \end{cases} \Longleftrightarrow g(t,\tau) = -\frac{1}{2}e^{-|t-\tau|} \quad \forall t \neq \tau$$

Συνάρτηση Green (είναι η λύση (y_p) για $g(t) = \delta(t-\tau)$)

Αναπαράσταση της ειδικής λύσης μέσω της συνάρτησης Green

Έστω $ay'' + by' + cy = g(t)$, $t \geq t_0$

και την συνάρτηση Green $G(t;\tau)$ για την οποία ισχύει.

$$aG'' + bG' + cG = \delta(t-\tau)$$

Τότε η $y_p(t)$ γράφεται ως.

$$\boxed{y_p(t) = \int_{t_0}^{+\infty} \underline{G}(t;\tau)\, f(\tau)\, d\tau}$$

<u>Παράδειγμα</u>: Με χρήση της συνάρτησης $\underline{G}$reen βρείτε μια ειδική λύση για την εξίσωση $y'' - y = e^{-t}$, $t \geq 0$

Από προηγούμενο παράδειγμα $\underline{G}(t;\tau) = -\frac{1}{2} e^{-|t-\tau|}$

$$y_p(t) = \int_0^{+\infty} \underline{G}(t;\tau) f(\tau)\, d\tau = -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-|t-\tau|} e^{-\tau}\, d\tau =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{t} e^{-t} e^{\tau} e^{-\tau}\, d\tau - \frac{1}{2}\int_t^{+\infty} e^{t} e^{-\tau} e^{-\tau}\, d\tau =$$

$$= -\frac{e^{-t}}{2}\int_0^{t} d\tau - \frac{e^{t}}{2}\int_t^{+\infty} e^{-2\tau}\, d\tau =$$

$$\left(e^{-2\tau}\right)' = -2e^{-2\tau}$$

$$= -\frac{te^{-t}}{2} + \frac{e^{t}}{4}\left[e^{-2\tau}\right]_{t}^{+\infty} =$$

$$= -\frac{te^{-t}}{2} - \frac{e^{-t}}{4} = \left(-\frac{t}{2} - \frac{1}{4}\right)e^{-t}$$