Παρασκευή 6.12.2024, 13.12.2024 6.00 pm - 9.00 pm

29.11.2024 7.00 pm - 7.45 pm. Online quiz

$$\alpha y'' + by' + cy = 0 \quad \begin{cases} \Delta > 0 & y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} \\ \Delta = 0 & y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 t e^{r_1 t} \\ \Delta < 0 & r_{1,2} = \lambda \pm i\mu \quad y(t) = c_1 e^{\lambda t}\cos(\mu t) + c_2 e^{\lambda t}\sin(\mu t) \end{cases}$$

$i = \sqrt{-1}$

↑ quiz

Μη ομογενής 2 τάξης διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές

όρος πηγής

$$\alpha y'' + by' + cy = g(t) \quad (*)$$

Έστω $Y_1(t)$ και $Y_2(t)$ δύο λύσεις της (*)

Θέλουμε $y_h(t) = Y_1(t) - Y_2(t)$.

$$\left.\begin{aligned} \alpha Y_1'' + bY_1' + cY_1 &= g(t) \\ \alpha Y_2'' + bY_2' + cY_2 &= g(t) \end{aligned}\right\} \rightarrow \alpha(Y_1'' - Y_2'') + b(Y_1' - Y_2') + c(Y_1 - Y_2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha\underbrace{(Y_1-Y_2)}_{y_h}'' + b\underbrace{(Y_1-Y_2)}_{y_h}' + c\underbrace{(Y_1-Y_2)}_{y_h} = 0 \quad \text{άρα} \quad \alpha y_h''(t) + b y_h'(t) + c y_h(t) = 0$$

$$Y_1(t) = y_h(t) + Y_2(t)$$

Έστω $y_p(t) = Y_2(t)$ μία οποιαδήποτε λύση (συνήθως απ' την μορφή)

γενική λύση $y(t) = Y_1(t)$

λύση του ομογενούς προβλήματος

ειδική λύση

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

$g(t)$	$y_p(t)$
$P_n(t)$	$t^s(A_n t^n + A_{n-1}t^{n-1} + \dots + A_1 t + A_0)$, $s=0,1,2$
$P_n(t)e^{\alpha t}$	$t^s(A_n t^n + A_{n-1}t^{n-1} + \dots + A_1 t + A_0)e^{\alpha t}$, $s=0,1,2$
$P_n(t)\cdot\begin{cases}\sin(\beta t)\\ \text{ή}\\ \cos(\beta t)\end{cases}$	$t^s(A_n t^n + A_{n-1}t^{n-1} + \dots + A_1 t + A_0)\cos(\beta t) +$ $+ t^s(B_n t^n + B_{n-1}t^{n-1} + \dots + B_1 t + B_0)\sin(\beta t)$, $s=0,1,2$

Παραδείγματα:

$$y'' - 3y' - 4y = 2e^{-t}$$

Βρείτε την γενική λύση της παραπάνω εξίσωσης.

$y_h(t) = ;$ $\qquad$ $y_p(t) = ;$

1° βήμα: $y_h'' - 3y_h' - 4y_h = 0$

χαρακτηριστικό πολυώνυμο. $r^2 - 3r - 4 = 0 \Rightarrow -1 = r_1, \quad 4 = r_2$

$$y_h(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{4t}.$$

2° βήμα: $y_p(t) = ;$, $g(t) = \overset{P_0(t)}{2}\,\underbrace{e^{-t}}_{e^{\alpha t},\ \alpha = -1}$

(Θέλουμε $y_p'' - 3y_p' - 4y_p = 2e^{-t}$)

$$y_p(t) = t^{s} A_0 e^{-t}, \quad s = 0 \text{ ή } 1 \text{ ή } 2$$

Δοκιμάζουμε για $s=0$. $\quad y_p(t) = A_0 e^{-t}$

$$y_p'(t) = -A_0 e^{-t}, \quad y_p''(t) = A_0 e^{-t}$$

$$A_0 e^{-t} + 3A_0 e^{-t} - 4A_0 e^{-t} = 2e^{-t} \Rightarrow 0 A_0 e^{-t} = 2e^{-t}$$

Δοκιμάζουμε για $s=1$

$$y_p(t) = tA_0 e^{-t}$$

$$y_p'(t) = A_0 e^{-t} - tA_0 e^{-t}$$

$$y_p''(t) = -A_0 e^{-t} - A_0 e^{-t} + tA_0 e^{-t} = -2A_0 e^{-t} + tA_0 e^{-t}$$

Από εξίσωση...

$$\underbrace{-2A_0 e^{-t} + tA_0 e^{-t}}_{y_p''} - 3\left(\underbrace{A_0 e^{-t} - tA_0 e^{-t}}_{y_p'}\right) - 4\underbrace{tA_0 e^{-t}}_{y_p} = 2e^{-t}$$

$$\Rightarrow -2A_0 e^{-t} + \cancel{tA_0 e^{-t}} - 3A_0 e^{-t} + \cancel{3tA_0 e^{-t}} - \cancel{4tA_0 e^{-t}} = 2e^{-t}$$

$$\Rightarrow -5A_0 e^{-t} = 2e^{-t} \Rightarrow A_0 = -\frac{2}{5}$$

Άρα $y_p(t) = -\frac{2}{5} t e^{-t}$

3° βήμα: Γράφουμε τη γενική λύση του μη ομογενούς προβλήματος

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{4t} - \frac{2}{5} t e^{-t}$$

Παράδειγμα 2:

$$y'' + 2y' + 5y = \overbrace{3\sin(2t)}^{q(t)}$$

$$\Delta < 0 \quad r_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2\alpha}$$

1° βήμα:

$$y_h'' + 2y_h' + 5y_h = 0. \qquad r^2 + 2r + 5 = 0, \quad r_{1,2} = \frac{-2 \pm i\sqrt{16}}{2} = \underset{\lambda}{-1} \pm \underset{\mu}{2} i$$

$$y_h = c_1 e^{-t}\cos(2t) + c_2 e^{-t}\sin(2t)$$

2° βήμα: $q(t) = P_0(t)\sin(\beta t)$

$$y_p(t) = t^s A_0\cos(2t) + t^s B_0 \sin(2t) \quad , \; s = 0, \text{ ή } 1 \text{ ή } 2$$

Δοκιμάζω $s=0$

$$y_p(t) = A_0\cos(2t) + B_0\sin(2t)$$

$$y_p'(t) = -2A_0\sin(2t) + 2B_0\cos(2t)$$

$$y_p''(t) = -4A_0\cos(2t) - 4B_0\sin(2t)$$

$$-4A_0\cos(2t) - 4B_0\sin(2t) + 2\left(-2A_0\sin(2t) + 2B_0\cos(2t)\right) + 5\left(A_0\cos(2t) + B_0\sin(2t)\right) = 3\sin(2t)$$

$$-4A_0\cos(2t) - 4B_0\sin(2t) - 4A_0\sin(2t) + 4B_0\cos(2t) + 5A_0\cos(2t) + 5B_0\sin(2t) = 3\sin(2t)$$

$$(-4A_0 + 4B_0 + 5A_0)\cos(2t) + (-4B_0 - 4A_0 + 5B_0)\sin(2t) = 3\sin(2t) + 0\cdot\cos(2t)$$

$$\underbrace{(A_0 + 4B_0)}_{0}\cos(2t) + \underbrace{(-4A_0 + B_0)}_{3}\sin(2t) = 3\sin(2t) + 0\cdot\cos(2t)$$

$$\left.\begin{aligned} A_0 + 4B_0 &= 0 \\ -4A_0 + B_0 &= 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 17B_0 = 3 \Rightarrow B_0 = \frac{3}{17}$$

$$A_0 = -4B_0 = -\frac{12}{17}$$

Άρα $y_p(t) = -\frac{12}{17}\cos(2t) + \frac{3}{17}\sin(2t)$

3ο βήμα: Γενική λύση του μη ομογενούς.

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = c_1 e^{-t}\cos(2t) + c_2 e^{-t}\sin(2t) - \frac{12}{17}\cos(2t) + \frac{3}{17}\sin(2t)$$

$$= \left(c_1 e^{-t} - \frac{12}{17}\right)\cos(2t) + \left(c_2 e^{-t} + \frac{3}{17}\right)\sin(2t).$$

Μετασχηματισμός Fourier

Fourier

Έστω $y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ορίζουμε το μετασχηματισμό Fourier της y ως εξής:

$$\boxed{\hat{y}(\omega) = \mathcal{F}\{y(t)\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)\, e^{-i\omega t}\, dt}$$

t: χρόνος

ω: συχνότητα.

Αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier

$$\boxed{y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\hat{y}(\omega)\}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{y}(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega}$$

<u>Ιδιότητες:</u>

→ Γραμμικότητα $\qquad \alpha y_1(t) + b y_2(t) \underset{\mathcal{F}^{-1}}{\overset{\mathcal{F}}{\rightleftarrows}} \alpha \hat{y}_1(\omega) + b \hat{y}_2(\omega)$

→ Μετατόπιση στο χρόνο $\qquad y(t - t_0) \longleftrightarrow e^{-i\omega t_0} \cdot \hat{y}(\omega)$

→ Μετατόπιση στη συχνότητα $\qquad e^{i\omega_0 t} y(t) \longleftrightarrow \hat{y}(\omega - \omega_0)$

→ Συνέλιξη $\qquad (y_1 * y_2)(t) \longleftrightarrow \hat{y}_1(\omega)\, \hat{y}_2(\omega)$

→ Πολλαπλασιασμός $\qquad y_1(t)\, y_2(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi}(\hat{y}_1 * \hat{y}_2)(\omega)$

$$(y_1 * y_2)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y_1(\tau)\, y_2(t-\tau)\, d\tau$$

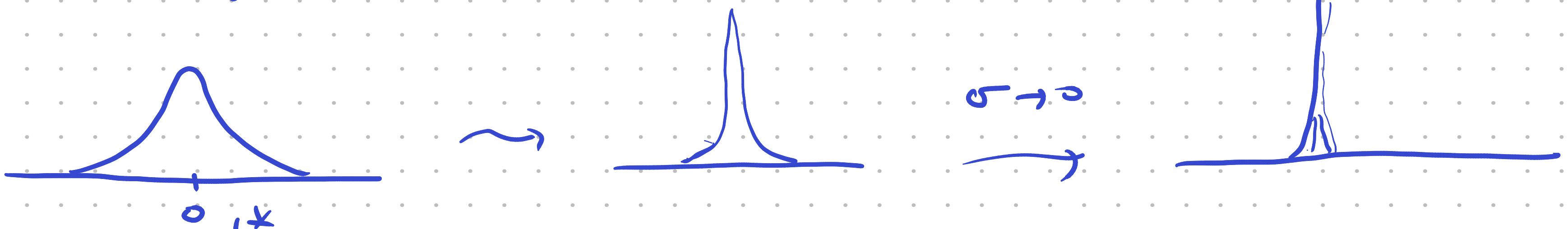
<u>Συνέλιξη</u>

$y(t)$	$\hat{y}(\omega)$
$\delta(t)$	1
$\delta(t-t_0)$	$e^{-i\omega t_0}$
1	$2\pi\delta(\omega)$
$e^{i\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$
$\cos(\omega_0 t)$	$\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$
$\sin(\omega_0 t)$	$i\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$
$H(t)$	$\pi\delta(\omega)+\frac{1}{i\omega}$
$e^{-t^2/2}$	$\sqrt{2\pi}\, e^{-\omega^2/2}$

$\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Dirac f γνωστή συνάρτηση

$\delta(t) = 0 \quad \forall t \neq 0$ τ.ω $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t)\,dt = f(0)$

Προιοτα $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = 1$. Η συνάρτηση δ είναι μια κατανομή.



$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\overbrace{t-1}^{t^*}) f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t^*) f(t^*+1)\,dt^* = f(1)$$

$t^* = t-1 \Rightarrow dt^* = dt$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\, f(t)\, dt = f(t_0)$$