$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(0) = 0 \end{cases} \qquad t \in [0,T],\ T>0$$

να ικανοποιεί την αρχική συνθήκη.

Μέθοδο Picard

① $\phi_0(t)$ τ.ω $\phi_0(0) = 0$

② $\phi_j(t) = \int_0^t f(s, \phi_{j-1}(s))\,ds \quad \forall j = 1,2,\dots$

$\lim_{j\to\infty} \phi_j(t) = \phi(t)$ η λύση του ΠΑΤ

$$\phi(t) = \lim_{j\to\infty} \phi_j(t) = \lim_{j\to\infty} \int_0^t f(s, \phi_{j-1}(s))\,ds =$$

$$= \int_0^t \lim_{j\to\infty} f(s, \phi_{j-1}(s))\,ds =$$

$$= \int_0^t f(s, \underbrace{\lim_{j\to\infty} \phi_{j-1}(s)}_{\phi(s)})\,ds$$

$$\phi(t) = \int_0^t f(s, \phi(s))\,ds$$

$$\phi'(t) = f(t, \phi(t)) - f(0, \cancel{\phi(0)})$$

Παράδειγμα Έστω το ΠΑΤ.

$y' = 2t(1+y) \longrightarrow f(t,y)$

$y(0) = 0$

Θέλουμε να εφαρμόσουμε τη μέθοδο Picard.

① $\phi_0(t) = 0$ $\qquad f(t,y) = 2t(1+y)$ $\qquad \phi_j(0) = 0 = \int_0^0 \sim\sim$ ← biwodiki

$\phi_j(0) \to \phi(0) = 0.$

$\phi_0(s) = 0$

② $\phi_1(t) = \int_0^t f(s,\phi_0(s))\,ds = \int_0^t 2s(1+0)\,ds =$

$= \int_0^t 2s\,ds = 2\int_0^t s\,ds = 2\left.\frac{s^2}{2}\right|_0^t = t^2$

$\phi_2(t) = \int_0^t f(s,\phi_1(s))\,ds = \int_0^t 2s(1+s^2)\,ds = \underbrace{\int_0^t 2s\,ds}_{= t^2} + \underbrace{\int_0^t 2s^3\,ds}_{\frac{t^4}{2}} = t^2 + \frac{t^4}{2}$

$\phi_3(t) = \int_0^t f(s,\phi_2(s))\,ds = \int_0^t 2s\left(1+s^2+\frac{s^4}{2}\right)ds =$

$= \underbrace{\int_0^t 2s(1+s^2)\,ds}_{t^2 + \frac{t^4}{1\cdot 2}} + \int_0^t 2s\,\frac{s^4}{2}\,ds$

$$\int_0^t s^5 ds = \frac{t^6}{6} = \frac{t^6}{1\cdot 2\cdot 3}$$

$\vdots$

$$\phi_j(t) = t^2 + \frac{t^4}{2!} + \frac{t^6}{3!} + \cdots + \frac{t^{2j}}{j!}$$ ← Θεωρούμε ότι ισχύει για το ϕ_j

$$\phi_{j+1}(t) = \int_0^t f(s, \phi_j(s))\, ds = \int_0^t 2s \left(1 + s^2 + \frac{s^4}{2!} + \frac{s^6}{3!} + \cdots + \frac{s^{2j}}{j!}\right) ds =$$

$$= \underbrace{\int_0^t 2s\left(1 + s^2 + \frac{s^4}{2!} + \cdots + \frac{s^{2(j-1)}}{(j-1)!}\right) ds}_{\phi_j(t) = t^2 + \cdots + \frac{t^{2j}}{j!}} + \underbrace{\int_0^t 2s \cdot \frac{s^{2j}}{j!}\, ds}$$

$$\int_0^t 2s \cdot \frac{s^{2j}}{j!}\, ds = \frac{2}{j!}\int_0^t s^{2j+1}\, ds = \frac{2}{j!}\,\frac{t^{2j+1+1}}{2j+1+1} = \frac{\cancel{2}\cdot t^{2(j+1)}}{j!\,\cancel{2}(j+1)} = \frac{t^{2(j+1)}}{(j+1)!}$$

Αρα $\phi_j(t) = \sum_{k=1}^{j} \frac{t^{2k}}{k!}$, $j=1,2,\dots$

$\left(\text{ΑΠ ΙΙ} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = e^t \right)$

$$\lim_{j\to\infty} \phi_j(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{2k}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{k!} - 1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t^2)^k}{k!} - 1 = e^{t^2} - 1$$

Η λύση της εξίσωσης είναι $e^{t^2}-1$.

Απο θεώρημα $\exists$ μοναδική λύση γύρω απο το $t=0$.

Διαφορικές Εξισώσεις 2ης Τάξης

$\alpha(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = d(t)$, α, b, c, d συνεχείς συναρτήσεις.

Ομογενής $d(t)=0 \leftarrow$

μη-Ομογενής $d(t)\neq 0$

Διαφορικές Εξισώσεις 2ης τάξης, ομογενείς και με σταθερούς συντελεστές.

$\alpha(t) = \alpha \in \mathbb{R}$, $b(t) = b \in \mathbb{R}$, $c(t) = c \in \mathbb{R}$.

$$e^{rt}$$

$$\alpha y''(t) + b y'(t) + c y(t) = 0 \quad (*)$$

Ψάχνουμε για λύση της μορφής $y(t) = e^{rt}$

$y'(t) = r e^{rt}$ $\quad y''(t) = r^2 e^{rt}$.

$$(*) \quad \alpha r^2 e^{rt} + b r e^{rt} + c e^{rt} = 0 \Rightarrow \overbrace{e^{rt}}^{>0}(\alpha r^2 + br + c) = 0$$

$\Rightarrow \alpha r^2 + br + c = 0$ →

- $r_1 \neq r_2$, $\Delta > 0$
- r_1 διπλή ρίζα , $\Delta = 0$
- $\lambda \pm i\mu$, $\Delta < 0$

(α) $r_1 \neq r_2$ $\quad y_1 = e^{r_1 t}$, $y_2 = e^{r_2 t}$ είναι λύσεις της εξίσωσης

Γενική λύση: Αν y_1, y_2 λύσεις τότε η $y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ είναι επίσης λύση.

$$y''(t) = c_1 y_1''(t) + c_2 y_2''(t)$$

$$y'(t) = c_1 y_1'(t) + c_2 y_2'(t)$$

$$\alpha(c_1 y_1'' + c_2 y_2'') + b(c_1 y_1' + c_2 y_2') + c(c_1 y_1 + c_2 y_2) =$$

$$= c_1 \underbrace{(\alpha y_1'' + b y_1' + c y_1)}_{= 0} + c_2 \underbrace{(\alpha y_2'' + b y_2' + c y_2)}_{= 0} = 0$$

Παράδειγμα: Βρείτε την γενική λύση της εξίσωσης $y'' + 5y' + 6y = 0$.

$$r^2 + 5r + 6 = 0 \Rightarrow r_1 = -3, \quad r_2 = -2$$

Γενική λύση: $y(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{-2t}$

ΠΑΤ; σταθερούς συντελεστές, $r_1 \neq r_2$

$$\begin{cases} \alpha y'' + by' + cy = 0 \\ y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R} \\ y'(t_0) = y_0' \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$

$$y'(t) = c_1 r_1 e^{r_1 t} + c_2 r_2 e^{r_2 t}$$

Εφαρμόζουμε τις αρχικές συνθήκες

$$\begin{cases} c_1 e^{r_1 t_0} + c_2 e^{r_2 t_0} = y_0 \\ c_1 r_1 e^{r_1 t_0} + c_2 r_2 e^{r_2 t_0} = y_0' \end{cases}$$

$$\overbrace{\begin{bmatrix} e^{r_1 t_0} & e^{r_2 t_0} \\ r_1 e^{r_1 t_0} & r_2 e^{r_2 t_0} \end{bmatrix}}^{A} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_0' \end{bmatrix}$$

Θέλουμε $\det A \neq 0$

$$r_2 e^{r_1 t_0} \cdot e^{r_2 t_0} - r_1 e^{r_1 t_0} e^{r_2 t_0} = r_2 e^{(r_1 + r_2) t_0} - r_1 e^{(r_1 + r_2) t_0} = (r_2 - r_1) e^{(r_1 + r_2) t_0} \neq 0$$

Παράδειγμα: Βρείτε την γενική λύση της εξίσωσης

$$\begin{cases} y'' + 5y' + 6y = 0. \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

$$r^2 + 5r + 6 = 0 \Rightarrow r_1 = -3 \ , \ r_2 = -2$$

Γενική λύση: $y(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{-2t}$

$$y' = -3c_1 e^{-3t} - 2c_2 e^{-2t}$$

$$\left.\begin{array}{l} y(0) = 0 = c_1 + c_2 \Rightarrow \boxed{c_1 = -c_2} \\ y' = 3c_2 e^{-3t} - 2c_2 e^{-2t} \Rightarrow y'(0) = c_2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} c_1 = -1 \\ c_2 = 1 \end{array}$$

άρα η λύση είναι $\boxed{y(t) = -e^{-3t} + e^{-2t}}$

(b) r_1 διπλή ρίζα

$$y_1(t) = e^{r_1 t}$$

Γενική λύση ? $y(t) = c_1 e^{r_1 t}$

$y_2(t) = ;$ Δοκιμάζουμε $y_2(t) = v(t)\,y_1(t)$

$$y_2'(t) = v'(t)\,y_1(t) + v(t)\,y_1'(t)$$

$$y_2''(t) = v''(t)\,y_1(t) + v'(t)\,y_1'(t) + v'(t)\,y_1'(t) + v(t)\,y_1''(t) = v''y_1 + 2v'y_1' + vy_1''$$

$$\alpha y_2'' + by_2' + cy_2 = 0 \Rightarrow \alpha(v''y_1 + 2v'y_1' + vy_1'') + b(v'y_1 + vy_1') + cvy_1 = 0$$

$$y_1(t) = e^{r_1 t} \qquad y_1' = r_1 e^{r_1 t} \qquad y_1'' = r_1^2 e^{r_1 t}$$

$$\alpha(v''e^{r_1 t} + 2r_1 e^{r_1 t} v' + r_1^2 e^{r_1 t} v) + b(v'e^{r_1 t} + v r_1 e^{r_1 t}) + cve^{r_1 t} = 0$$

$$\Rightarrow \alpha v'' + 2\alpha r_1 v' + r_1^2 \alpha v + bv' + br_1 v + cv = 0$$

$$\Rightarrow \alpha v'' + \underbrace{(2\alpha r_1 + b)}_{=0}v' + \underbrace{(r_1^2\alpha + br_1 + c)}_{=0}v = 0$$

$$\boxed{r_1 = -\frac{b}{2\alpha}}$$

$$\alpha v'' = 0 \Rightarrow v'' = 0 \Rightarrow v' = \xi \in \mathbb{R} \Rightarrow v(t) = \xi t + \eta, \ \xi, \eta \in \mathbb{R}$$

$\xi = 1$, $\eta = 0$

Η $y_2(t) = t e^{r_1 t}$ είναι λύση της εξίσωσης.

Γενική λύση: $\boxed{y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 t e^{r_1 t}}$