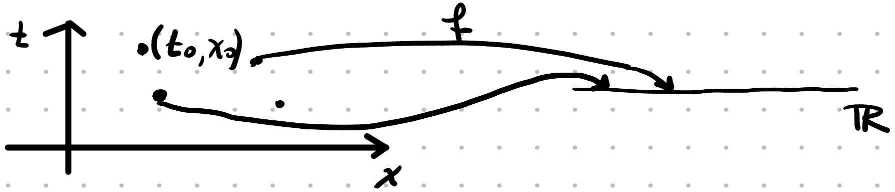
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Παραγ. της f.

$$\frac{df}{dt}(t_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(t_0+h) - f(t_0)}{h} = f'(t_0)$$

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$f(t,x)$



Πχ. $f(t,x) = x^3 + t$

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t_0,x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(t_0+h, x_0) - f(t_0,x_0)}{h} = f_t(t_0,x_0)$$ Μερική Παραγ. της f ως προς t

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t_0,x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(t_0, x_0+h) - f(t_0,x_0)}{h} = f_x(t_0,x_0)$$ Μερική Παραγ. της f ως προς x.

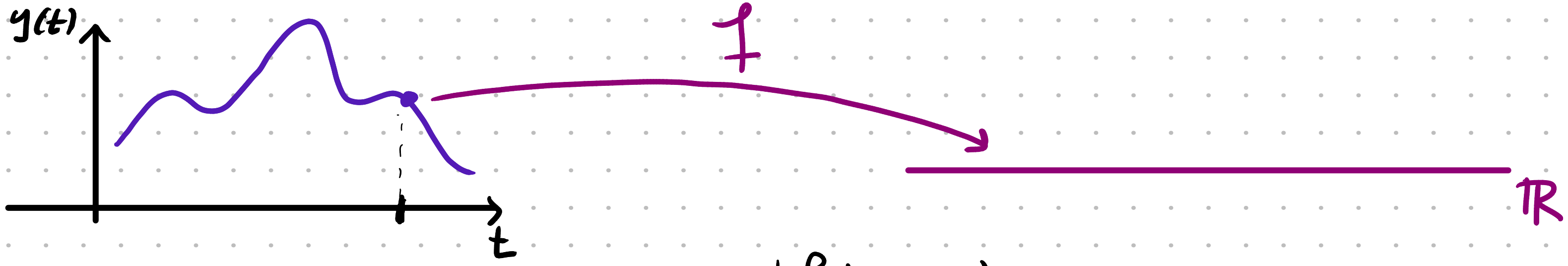
Παράδειγμα: $f(t,x) = t^3 + tx$

$f_t(t,x) = 3t^2 + x$, $f_x(t,x) = t$

$(f(t,x) = t^3 + t\cdot 5)$ $\quad$ $(f(t,x) = 1^3 + 1x)$

$f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ $\quad \frac{\partial f}{\partial x_j} = f_{x_j}, \quad j = 1, \dots, n.$

$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$



$f(t, y(t))$ Μπορώ να ορίσω την $\frac{d f(t, y(t))}{dt}$

$f(t, y)$ Μπορώ να ορίσω τις $\frac{\partial f}{\partial t}(t, y)$ και $\frac{\partial f}{\partial y}(t, y)$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d f(t, y(t))}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d y(t)}{dt} \quad (*) \\ \frac{d f}{dt}(x(t), y(t)) &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} \end{aligned}}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\cancelto{1}{\frac{dt}{dt}} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d y(t)}{dt} \right)$$

Παράδειγμα : $f(t, y) = t^2 y + y^2$, $\quad y(t) = 2t$.

$f_t = ;$ $\quad f_y = ;$ $\quad \frac{df}{dt}(t, y(t))$ $\qquad \frac{dy}{dt} = y' = 2 \quad (\sim)$

$f_t = 2ty + 0 = 2ty \quad (\tilde{\sim})$

$f_y = t^2 + 2y \quad (\tilde{\tilde{\sim}})$

$(\sim), (\tilde{\sim}), (\tilde{\tilde{\sim}}), (*) \Rightarrow \frac{df}{dt} = \overbrace{2ty}^{f_t} + \overbrace{(t^2 + 2y)}^{f_y} \cdot \overbrace{2}^{y' = \frac{dy}{dt}} = 2ty + 2t^2 + 4y \overset{y = 2t}{=}$

$= 2t \cdot (2t) + 2t^2 + 4 \cdot (2t) =$

$= 4t^2 + 2t^2 + 8t = 6t^2 + 8t$

$f(t, y(t)) = t^2 \cdot (2t) + (2t)^2 = 2t^3 + 4t^2$.

$\frac{df}{dt}(t, y(t)) = 6t^2 + 8t$

Ακριβείς Διαφορικές Εξισώσεις (Exact differential Equations)

$M(t,y) + N(t,y)\,y' = 0$ και $\exists\, \psi \;(=\psi(t,y))$ τ.ω. $\dfrac{\partial \psi}{\partial t} = M(t,y)$ και $\dfrac{\partial \psi}{\partial y} = N(t,y)$

$$M(t,y) + N(t,y)\,y' = \overbrace{\frac{\partial \psi}{\partial t}}^{M} + \overbrace{\frac{\partial \psi}{\partial y}}^{N} \frac{dy}{dt} \overset{\text{από } (*)}{=} \frac{d\,\psi(t,y(t))}{dt} = 0$$

άρα $\boxed{\psi(t,y(t)) = c}$ όπου $c \in \mathbb{R}$

Πότε υπάρχει τέτοιο ψ?

$\exists\, \psi \underset{\text{ανν}}{\iff} M_y = N_t$ $\qquad (\psi_y)_t = N_t$

$\Uparrow$

$(\Rightarrow)$ Έστω ότι $\exists\, \psi$ τ.ω. $\psi_t = M$, $\psi_y = N$

$\Downarrow$

$$(\psi_t)_y = M_y$$

άρα από $(**)$ $\Rightarrow M_y = N_t$

Ιδιότητα:

$$(\psi_t)_y = (\psi_y)_t = \psi_{yt} = \psi_{ty} \quad (**)$$

Παράδειγμα

$f(t,y) = t^2 y + y^2 \to f_t = 2ty \rightsquigarrow (f_t)_y = f_{ty} = 2t$

$f_y = t^2 + 2y \rightsquigarrow (f_y)_t = f_{yt} = 2t$

(⇐)

Έστω $M_y = N_t$ θ.ν.δ.ο $\exists\, \Psi$ τ.ω $\Psi_t = M(t,y)$ και $\Psi_y = N(t,y)$

Έστω Ψ τ.ω $\Psi_t = M(t,y)$ και θ.δ.ο επίσης $\Psi_y = N(t,y)$

$$\Psi_t = M(t,y) \xRightarrow{\text{ολοκλ. ως προς } t} \int \Psi_t \, dt = \int M(t,y)\,dt + \underbrace{C(y)}_{\text{σταθερά ολοκληρ.}}$$

$$\Rightarrow \Psi(t,y) = \int M(t,y)\,dt + C(y) \xRightarrow{\text{Παραγ. ως προς } y}$$

$$\Rightarrow \Psi_y(t,y) = \frac{\partial}{\partial y}\int M(t,y)\,dt + C'(y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{C'(y)}_{\text{συνάρτηση του } y} = \underbrace{\Psi_y(t,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(t,y)\,dt}_{\text{πρέπει να είναι συνάρτηση του } y.}$$

άρα $$N(t,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(t,y)\,dt = \text{σταθερά ως προς } t$$

$$\Rightarrow N(t,y) - \int \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} M(t,y)}_{M_y(t,y)}\,dt = \text{σταθερά ως προς } t$$

Παραγ. ως προς t.

$$\Rightarrow N_t(t,y) - \frac{\partial}{\partial t}\int M_y(t,y)\,dt = 0$$

$$\Rightarrow N_t(t,y) = M_y(t,y)$$

Παράδειγμα

ελεύθερη μεταβλητή — εξαρτημένη δηλ. $y = y(x)$

$$(y\cos x + 2xe^y) + (\sin x + x^2 e^y - 1)\,y' = 0$$

Αν $M_y = N_x$ $\exists\, \psi$ τ.ω. $\psi_x = M$ και $\psi_y = N$

$$M(x,y) = y\cos x + 2xe^y \Rightarrow M_y = \cos x + 2xe^y$$

$$N(x,y) = \sin x + x^2 e^y - 1 \Rightarrow N_x = \cos x + 2xe^y$$

άρα $\exists\, \psi$

ολοκλ. ως προς x

$$\psi_x = M = y\cos x + 2xe^y \Rightarrow \int \psi_x\,dx = \int (y\cos x + 2xe^y)\,dx + C(y)$$

$$\Rightarrow \psi(x,y) = y\int \cos x\,dx + 2e^y \int x\,dx + C(y)$$

$$= y\sin x + e^y x^2 + C(y)$$

$$\psi_y(x,y) = \sin x + e^y x^2 + C'(y) = N(x,y) = \sin x + x^2 e^y - 1$$

άρα $C'(y) = -1 \Rightarrow C(y) = -y + \text{σταθερά}$

Η λύση της εξίσωσης είναι

$$\psi(x, y(x)) = C \in \mathbb{R} \Rightarrow \boxed{y\sin x + x^2 e^y - y = C}$$ λύνεται αριθμητικά

Homework: $\boxed{2x + y^2 + 2xyy' = 0}$

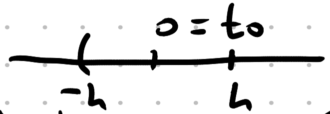
<u>Θεώρημα</u>: Εαν f και f_y είναι συνεχείς συναρτήσεις σε ένα ορθογώνιο $R: \{(t,y) : |t-t_0| \leq T$ και $|y-y_0| \leq Y\}$ τότε υπάρχει $0<h\leq T$ τ.ω. $\exists$ μοναδική λύση $y=\Phi(t)$ του προβλήματος αρχικών τιμών $\forall t \in (t_0-h, t_0+h)$

$$\left.\begin{aligned} y' &= f(t,y) \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned}\right\}$$

$$y' = te^y + y^3 \sin t$$
$$y(0) = 0$$

f, f_y συνεχείς. $\quad f_y = te^y + 3y^2 \sin t$

$\exists\, h>0$ τ.ω.



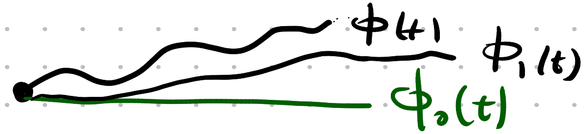
τουλάχιστος: να υπάρχει μοναδική λύση για $t\in(-h,h)$.

Επαναληπτική μέθοδος Picard

$$\begin{cases} y'=f(t,y)\\ y(0)=0\end{cases} \Rightarrow \int_0^t y'\,dt = \int_0^t f(s,y(s))\,ds = y(t)-\cancelto{0}{y(0)}$$

Έστω ότι η λύση είναι μια τυχαία συνάρτηση η οποία ικανοποιεί την αρχική συνθήκη.

$\phi_0(t)=0$



βρες μια νέα προσέγγιση $\phi_1(t)$ ως. $\phi_1(t)=\displaystyle\int_0^t f(s,\phi_0(s))\,ds$

$$\phi_2(t)=\int_0^t f(s,\phi_1(s))\,ds$$

$\vdots$

$$\phi_n(t)=\int_0^t f(s,\phi_{n-1}(s))\,ds.$$