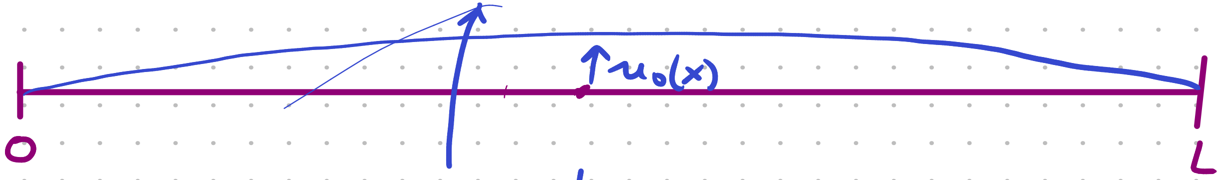
Κυματική Εξίσωση

(*) $u_{tt}=c^2 u_{xx}$, $x\in[0,L]$, $L>0$ $t\geq 0$

ΣΣ: $u(0,t)=u(L,t)=0$, $t\geq 0$ (**)

ΑΣ: $u(x,0)=u_0(x)$, $u_t(x,0)=v_0(x)$, $x\in[0,L]$



αρχική θέση της χορδής σε κάθε $x\in[0,L]$

Ψάχνουμε λύση της μορφής $u(x,t)=X(x)T(t)\neq 0 \quad \forall x\in(0,L)$

$$\left.\begin{aligned} u_{tt}(x,t)&=X(x)\ddot{T}(t)\\ u_{xx}(x,t)&=X''(x)T(t)\end{aligned}\right\} \overset{(*)}{\Rightarrow} X\ddot{T}=c^2X''T \Rightarrow \frac{\cancel{X}\ddot{T}}{c^2\cancel{X}T}=\frac{X''\cancel{T}}{X\cancel{T}}$$

$$\Rightarrow \frac{\ddot{T}}{c^2T}=\frac{X''}{X}=-\mu^2<0$$

$$\Rightarrow \frac{\ddot{T}}{c^2 T} = -\mu^2 \Rightarrow \boxed{\ddot{T} + c^2\mu^2 T = 0}$$ Πρόβλημα I

$$\Rightarrow \frac{X''}{X} = -\mu^2 \Rightarrow \boxed{X'' + \mu^2 X = 0}$$ Πρόβλημα II

Λύση του Προβλήματος II

$$\begin{cases} X'' + \mu^2 X = 0. \\ X(0) = \underbrace{X(L) = 0}. \end{cases}$$

Γενική λύση του II

$$X(x) = c_1 \cos(\mu x) + c_2 \sin(\mu x)$$

$$X(0) = c_1 = 0 \Rightarrow X(x) = c_2 \sin(\mu x)$$

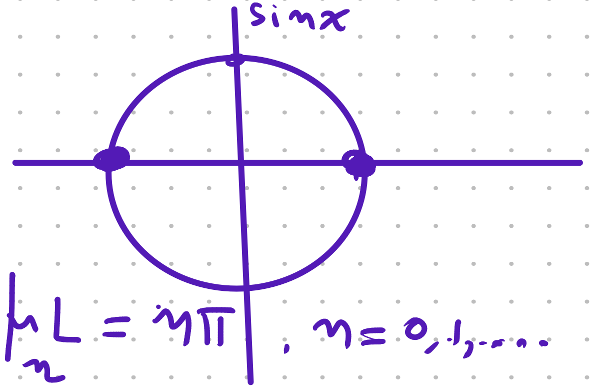
$$X(L) = c_2 \sin(\mu L) = 0 \Rightarrow \sin(\mu L) = 0 \Rightarrow \mu_n L = n\pi, \quad n = 0, 1, \ldots$$

**

$$u(0,t) = u(L,t) = 0$$

$$X(0)\,T(t) = X(L)\,T(t) = 0 \quad \forall t \geq 0$$

άρα $X(0) = X(L) = 0.$



$$\Rightarrow \mu_n = \frac{n\pi}{L}$$

Άρα η λύση του Προβλήματος II είναι η οικογένεια

$$X_n(x) = c_2 \sin(\mu_n x) = c_2 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad x \in [0, L], \quad n = 0, 1, \ldots$$

Λύση του Προβλήματος I

$$\ddot{T}_n + c^2 \mu_n^2 T_n = 0 \quad \Rightarrow \quad T_n(t) = b_1 \cos(c\mu_n t) + b_2 \sin(c\mu_n t)$$

$$\left(r^2 + c^2 \mu_n^2 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \pm i \boxed{c\mu_n} \right)$$

$$\ddot{T} \to r^2, \; \dot{T} \to r, \; T \to 1$$

$$u(x,t) = X(x)\,T(t) \longrightarrow u_n(x,t) = X_n(x)\,T_n(t) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\left[b_1 \cos\left(\frac{cn\pi t}{L}\right) + b_2 \sin\left(\frac{cn\pi t}{L}\right)\right]$$

ΑΣ: $u(x,0)=u_0(x)$, $u_t(x,0)=v_0(x)$

Προσδιορίζεται από την αρχική θέση.

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\left[b_1\cos\left(\frac{cn\pi t}{L}\right)+b_2\sin\left(\frac{cn\pi t}{L}\right)\right]$$

Προσδιορίζεται από την αρχική ταχύτητα.

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)b_1=u_0(x)\quad\forall x\in[0,L]$$

$$\Rightarrow b_1=\frac{2}{L}\int_0^L\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)u_0(x)\,dx$$

(Συντελεστές Fourier + περιττή επέκταση)

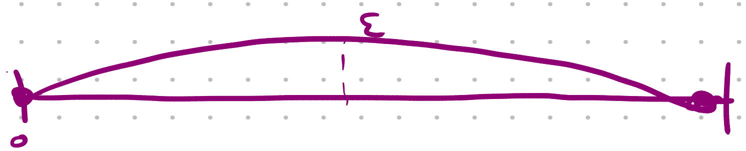
$$u_t(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\left[-\frac{cn\pi}{L}b_1\sin\left(\frac{cn\pi t}{L}\right)+\frac{cn\pi}{L}b_2\cos\left(\frac{cn\pi t}{L}\right)\right]$$

$$u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\underbrace{\frac{cn\pi}{L}b_2}_{\tilde{b}_2}=v_0(x)\quad\forall x\in[0,L]$$

Από συντελεστές Fourier + περιττή επέκταση.

$$\tilde{b}_2 = \frac{2}{L}\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) v_0(x)\, dx. \Rightarrow \frac{cn\pi}{L} b_2 = \frac{2}{L}\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) v_0(x)\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b_2 = \frac{2}{cn\pi}\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) v_0(x)\,dx.$$



Παράδειγμα: $c^2=1$

$u_{tt} = u_{xx}$, $x \in [0,1]$, $t \geq 0$

$u(0,t) = u(1,t) = 0$, $t \geq 0$

$u(x,0) = \varepsilon \sin(\pi x)$, $u_t(x,0) = 0$. , ε μικρή σταθερά

Λύση

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi x)\left[b_1 \cos(n\pi t) + b_2 \sin(n\pi t)\right]$$

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi x)\, b_n = \varepsilon \sin(\pi x) \qquad \sin(-x) = -\sin x$$

$$b_1 = 2\varepsilon \int_0^1 \sin(n\pi x)\sin(\pi x)\,dx$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)\,dx = \delta_{mn} = \begin{cases} 1, & m=n \\ 0, & m\neq n \end{cases} \qquad h(x)=f(x)g(x)$$

Εαν f, g περιττές συναρτήσεις τότε $\left.\begin{array}{l} f(-x) = -f(x) \\ g(-x) = -g(x) \end{array}\right\} \Rightarrow f(-x)g(-x) = f(x)g(x)$

$$h(-x) = h(x).$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)\,dx = \delta_{mn} = I$$

Αλλαγή μεταβλητής $x = \pi\tilde{x} \Rightarrow dx = \pi\, d\tilde{x} \Rightarrow \tilde{x} = \frac{x}{\pi}$

$$I = \frac{2}{\cancel{\pi}}\cancel{\pi}\int_0^1 \sin(m\pi\tilde{x})\sin(n\pi\tilde{x})\,d\tilde{x} = \delta_{mn}.$$

$$b_1 = \varepsilon\, 2\int_0^1 \sin(n\pi x)\sin(\pi x)\,dx = \varepsilon\,\delta_{n1}$$

Άρα η γενική λύση είναι.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi x)\,\varepsilon\,\delta_{n1}\cos(n\pi t) = \varepsilon \sin(\pi x)\cos(\pi t)$$

$$x \in [0,1]\,,\quad t \geq 0$$

THE END