Διαφορικές Εξισώσεις - Differential Equations

Βιβλιογραφία

→ Σημειώσεις Χαλιδιά's

→ ① Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Οικονομολ. και Μηχανικούς.

② Στοιχειώδεις Διαφορικές Εξισώσεις και Προβλήματα συνοριακών Τιμών
Boyce and Diprima.

also in English.

② Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems.
Boyce and Diprima.

③ Στοιχειώδεις Διαφορικές Εξισώσεις και Προβλήματα συνοριακών Τιμών
Trench

also in English.

③ Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems.
Trench.

Αξιολόγηση   2 quiz. από 10%   1 τελικό διαγ. 80%

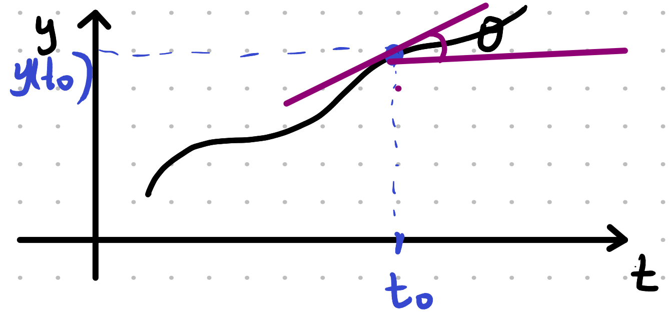
Πx: $\frac{1Q}{5}$ $\quad$ $\frac{2Q}{9}$ $\quad$ $\frac{F}{4}$

$$TB = 5*0.1 + 9*0.1 + 4*0.8$$
$$= 0.5 + 0.9 + 3.2$$

Τι είναι μια διαφορική εξίσωση;

Μια εξίσωση η οποία περιέχει παραγώγους μιας άγνωστης συνάρτησης.

Έστω συνάρτηση $y(t)$



$$y'(t_0) = \frac{dy(t_0)}{dt} = \tan\theta$$

Παράδειγμα: $y'(t) = y(t) \Rightarrow y(t) = e^t$ ✓. Σημείωση: Η λύση δεν είναι μοναδική

Ταξινόμηση των διαφορικών εξισώσεων.

I. Συνήθεις ή Μερικές / Ordinary or Partial.

1ο μέρος του μαθήματος $\quad$ 2ο μέρος του μαθήματος

Συνήθεις

$y = y(t)$

1 ελεύθερη μεταβλητή

Μερικές

$u = u(t,x)$

2 ή περισσότερες ελεύθερες μεταβλητές

Παραδείγματα

① $y' = y$, 1ης τάξης, γραμμική

② $y' = t^2 y$, 1ης τάξης, γραμμική

③ $y'' + ty' + y^2 = 1$, 2ης τάξης
μη γραμμική

④ $y' + yy' = 0$, 1ης τάξης
μη γραμμική

Μέρος 1ο Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις.

II. Τάξη της διαφορικής εξίσωσης (order of the dif. eq.)

Η τάξη προσδιορίζεται από τη τάξη της μεγαλύτερης παραγώγου.

Πχ: α) $y'(t) = y(t)$ 1ης τάξης

β) $y''(t) - 3y'(t) + y(t) = 0$ 2ης τάξης.

Γενική Μορφή $F[t, y(t), y'(t), \dots, y^{(p)}(t)] = 0$

α) $F[t, y, y'] = y'(t) - y(t)$

β) $F[t, y, y', y''] = y''(t) - 3y'(t) + y(t)$

η τάξη είναι $p \in \mathbb{N}$

III. Γραμμική ή Μη-γραμμική (Linear or Non-linear)

Γραμμική: → Όταν δεν υπάρχουν γινόμενα των $y, y', \dots, y^{(p)}$

→ Δεν υπάρχουν δυνάμεις των $y, y', \dots, y^{(p)}$

Μη γραμμική: Όταν δεν είναι γραμμική

Γενική Μορφή : Συνήθης Διαφορική Εξίσωση - $1^{ης}$ Τάξης - Γραμμική

$$\boxed{\alpha_p(t)y^{(p)}(t)+\alpha_{p-1}(t)y^{(p-1)}(t)+\dots+\alpha_1(t)y'(t)+\alpha_0(t)y(t)=q(t)}$$

Μέθοδος Ολοκληρωτικού Παράγοντα - Method of integrating factor

$y'+p(t)y=q(t)$, p, q είναι δοσμένες συναρτήσεις.

Έστω μια συνάρτηση $\mu(t)$, $\exists \mu'$ και $\mu(t)\neq 0$ $\forall t$

$$y'(t)+p(t)y(t)=q(t) \Leftrightarrow \mu(t)y'(t)+\underbrace{\mu(t)p(t)}_{\mu'(t)}y(t)=\mu(t)q(t) \quad (*) \Rightarrow$$

$$\left[(f(t)g(t))'=f'(t)g(t)+f(t)g'(t)\right]$$

Θα λύσουμε $\mu'(t)=\mu(t)p(t) \Rightarrow \dfrac{\mu'(t)}{\mu(t)}=p(t) \Rightarrow \displaystyle\int \frac{\mu'(t)}{\mu(t)}dt=\int p(t)\,dt$

$$\Rightarrow \ln|\mu(t)| = \int p(t)\,dt \Rightarrow |\mu(t)| = e^{\int p(t)\,dt} \Rightarrow \boxed{\mu(t) = e^{\int p(t)\,dt}}$$

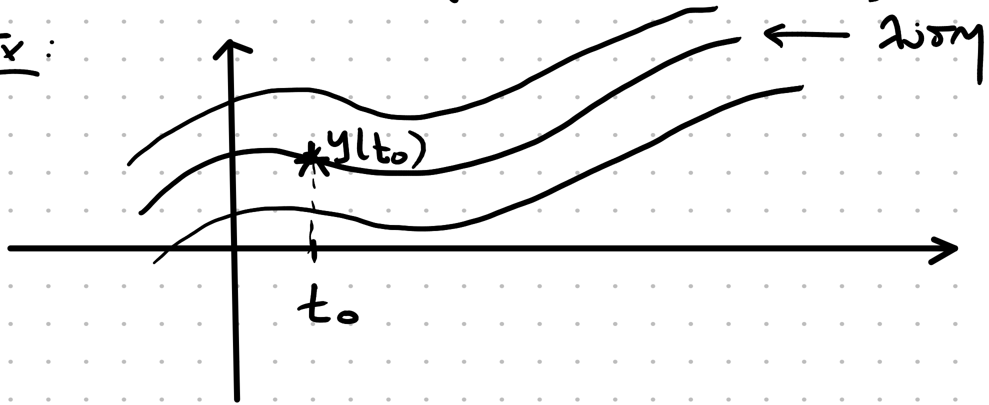
$$(*) \Rightarrow \left(\mu(t)y(t)\right)' = \mu(t)\,q(t)$$

$$\Rightarrow \int \left(\mu(t)y(t)\right)' dt = \int \mu(t)\,q(t)\,dt \Rightarrow \boxed{\mu(t)\,y(t) = \int \mu(t)\,q(t)\,dt + c}$$

$$\boxed{y(t) = e^{-\int p(t)\,dt}\left(\int e^{\int p(t)\,dt}\, q(t)\,dt + c\right)}$$

Πόσες λύσεις υπάρχουν; ∞, $c \in \mathbb{R}$

Πχ:



λύση η οποία ικανοποιεί την επιπλέον συνθήκη $y(t_0) = t_0$

Προβλήματα Αρχικών Τιμών (ΠΑΤ) – 1ης Τάξης – Γραμμικές

$$\begin{cases} y'(t) + p(t)y(t) = q(t), & t > t_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Το ΠΑΤ έχει μοναδική λύση

$$\boxed{y(t) = e^{-\int p(t)dt}\left(\int e^{\int p(t)dt} q(t)\,dt + c\right)}$$

Μπορώ να προσδιορίσω το c από την αρχική συνθήκη.

Παράδειγμα

$$\begin{cases} y' + \frac{2}{t}y = 4t, & t > 1 \\ y(1) = 2 & \leftarrow \text{Αρχική συνθήκη} \end{cases}$$

<u>Λύση</u>: $p(t) = 2/t \qquad q(t) = 4t$

<u>1ο βήμα</u> $\displaystyle \int p(t)\,dt = \int \frac{2}{t}\,dt = 2\int \frac{dt}{t} = 2\ln|t| = \ln|t|^2 = \ln t^2$

<u>2ο βήμα</u> $\displaystyle \int \underbrace{e^{\int p(t)dt}}\, q(t)\,dt = \int t^2\, 4t\,dt = 4\int t^3\,dt = 4\,\frac{t^4}{4} = t^4$

$$y(t) = e^{-\ln t^2}\left(t^4 + c\right) = \frac{1}{t^2}\left(t^4 + c\right)$$

<u>3ο βήμα</u> $\displaystyle y_0 = \frac{1}{t_0^2}\left(t_0^4 + c\right) \Rightarrow 2 = 1 + c \Rightarrow c = 1$

Άρα η μοναδική λύση του ΠΑΤ είναι $\boxed{y(t) = \dfrac{t^4+1}{t^2}}$

Παράδειγμα: Να λυθεί το Π.Α.Τ

$$\begin{cases} y' - \frac{1}{2}y = e^{-t}, & t>0 \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

Λύση

1° βήμα: $\int p(t)dt = \int\left(-\frac{1}{2}\right)dt = -\frac{t}{2}$

2° βήμα: $\int e^{\int p(t)dt} q(t)\,dt = \int e^{-t/2} e^{-t} dt = \int e^{-3/2 t} dt =$

$e^{-\int p(t)dt}$ $\quad = -\frac{2}{3}\int (e^{-3/2 t})' dt = -\frac{2}{3} e^{-3/2 t}$

$y(t) = e^{t/2}\left(-\frac{2}{3}e^{-3/2 t} + c\right) = -\frac{2}{3}e^{-t} + c\,e^{t/2}$

3° βήμα

$y(0) = -1 \Rightarrow -1 = -\frac{2}{3}\cancel{e^{-0}}^{1} + c\cancel{e^{0}}^{1} \Rightarrow c = 2/3 - 1 = -1/3$

Άρα η μοναδική λύση του ΠΑΤ είναι η συνάρτηση

$$\boxed{y(t) = -\frac{2}{3}e^{-t} - \frac{1}{3}e^{t/2}}$$

<u>Θεώρημα</u> 1: Έστω p, q συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα $I: \alpha < t < \beta$ το οποίο περιέχει το t_0. Τότε $\exists$ μοναδική λύση $y(t)$ η οποία ικανοποιεί το Π.Α.Τ
$$\begin{cases} y'(t) + p(t)y(t) = q(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Διαχωρίσιμες Εξισώσεις – Separable equations   Είναι εν γένει μη γραμμικές!

$$M(t) + N(y)y' = 0 \qquad \left(\pi\chi.\quad t + yy' = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{t}{y} + y' = 0\right)$$

$$(f \circ y)(t)$$

(Κανόνας της Αλυσίδας – Chain rule. $y = y(t)$
$$\frac{df(y)}{dt} = \frac{df(y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = f'(y)\,y'$$
)

Έστω $H_1(t)$ τ.ω $H_1'(t) = M(t)$ (δηλ. την παράγουσα του $M(t)$) και $H_2(y)$ τ.ω $H_2'(y) = N(y)$

Τότε $\quad M(t) + N(y)y' = 0 \iff H_1'(t) + H_2'(y)y' = 0$

$$\frac{d}{dt}H_1(t) + \underbrace{\frac{d}{dy}H_2(y)\,\frac{dy}{dt}}_{\frac{dH_2(y)}{dt}} = 0 \iff \frac{d}{dt}\big(H_1(t) + H_2(y)\big) = 0$$

$$\iff \boxed{H_1(t) + H_2(y) = c, \quad c \in \mathbb{R}}$$

Παράδειγμα:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{3t^2+4t+2}{2(y-1)} \quad , y(0) = -1 \quad , t>0$$

Λύση: $-(3t^2+4t+2) + 2(y-1)\frac{dy}{dt} = 0$ $\quad\left(M(t) + N(y)\,\frac{dy}{dt} = 0 \right)$

$M(t) = -3t^2 - 4t - 2$

$N(t) = 2(y-1)$

1ο βήμα: $H_1'(t) = -3t^2 - 4t - 2 \Rightarrow H_1(t) = -t^3 - 2t^2 - 2t$

2ο βήμα: $H_2'(y) = 2y - 2 \Rightarrow H_2(y) = y^2 - 2y$

$$-t^3 - 2t^2 - 2t + y^2 - 2y = c \in \mathbb{R}$$

για $t=0$ $\quad y(0) = -1 \Rightarrow 1+2 = c \Rightarrow c = 3$

Άρα

$y^2 - 2y - t^3 - 2t^2 - 2t - 3 = 0 \quad , \quad \Delta = 4\left(1 + t^3 + 2t^2 + 2t + 3\right) > 0$

$$y_{1,2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{t^3+2t^2+2t+4}}{2} = 1 \pm \sqrt{t^3+2t^2+2t+4}$$

Η μοναδική λύση είναι η συνάρτηση $\quad y(t) = 1 - \sqrt{t^3+2t^2+2t+4}\ , \ t \geq 0$